Załącznik 2.

Autoreferat

Spis treści

1. Imię i nazwisko: Sylwia Magdalena Kondej

2. Dyplomy i stopnie naukowe:

   - Magister fizyki teoretycznej - lipiec 1996, Wydział Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Wrocławskiego;
     - tytuł pracy magisterskiej: *Zaburzenia operatora Schrödingera na zbiorach o znikającej mierze Lebesgue*;
     - promotor pracy magisterskiej: prof. Witold Karwowski.
   - Doktor nauk fizycznych - listopad 2001, Wydział Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Wrocławskiego;
     - tytuł rozprawy doktorskiej: *Zaburzenia dynamiki przez obiekty skoncetrowane na małych zbiorach*;
     - promotor rozprawy doktorskiej: prof. Witold Karwowski;
     - recenzenci pracy doktorskiej: prof. Jan Janas, dr hab Lech Jakóbczyk.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu:

   - 1996-2001 - Studia doktoranckie na Wydziale Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Wrocławskiego, zakończone obroną pracy doktorskiej.
   - 2002 - roczny pobyt podoktorski w Czech Academy of Science, Řež koło Pragi.
   - 2005 - (marzec - wrzesień) Emmy-Noether junior researcher, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz (urlop na Uniwersytecie Zielonogórskim).
   - Od października 2003 - adiunkt na Wydziale Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Zielonogórskiego.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm).

4a. Tytuł osiągnięcia naukowego:

Asymptotyka spektralna w modelach kwantowo-mechanicznych z potencjałami typu delta.

4b. Publikacje naukowe wchodzące w skład osiągnięcia naukowego.

- **H1** S. Kondej,
  Straight quantum layer with impurities inducing resonances,
  Journal of Physics A : Mathematical and General **Vol. 50** no. 31, 315203 (2017)
- **H2** Sylwia Kondej, David Krejčiř ik,
  Asymptotic spectral analysis in colliding leaky quantum layers,
  Journal of Mathematical Analysis and Applications **Vol. 446** no. 2, 1328–1355 (2017)
- **H3** Sylwia Kondej, Vladimir Lotoreichik,
  Weakly coupled bound state of 2-D Schrödinger operator with potential-measure,
  Journal of Mathematical Analysis and Applications **Vol. 420** no. 2, 1416–1438 (2014)
- **H4** Sylwia Kondej, David Krejčiřík,
  Spectral analysis of a quantum system with a double line singular interaction,
  Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **Vol. 49** no. 4, 831–859 (2013)
- **H5** S. Kondej,
  Resonances induced by broken symmetry in a system with a singular potential,
  Annales Henri Poincaré **Vol. 13** no. 6, 1451–1467 (2012)
- **H6** P. Exner, S.Kondej,
  Hiatus perturbation for a singular Schrödinger operator with an interaction supported by a curve in R^3,
  Journal of Mathematical Physics **Vol. 49** no. 3, 03211 (2008)
- **H7** S. Kondej, I. Veselić
  Lower bounds on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians
  Annales Henri Poincaré **Vol. 8** no. 1, 109–134 (2007)

- **H8** P. Exner, S. Kondej,
  Scattering by local deformations of a straight leaky wire
  Journal of Physics A : Mathematical and General **Vol. 38** no. 22, 4865–4874 (2005)

- **H9** P. Exner, S. Kondej,
  Schrödinger operators with singular interactions: a model of tunneling resonances,
  Journal of Physics A : Mathematical and General **Vol. 37** no. 34, 8255-8277 (2004)

- **H10** P. Exner, S. Kondej,
  Strong-coupling asymptotic expansion for Schrödinger operators with a singular interaction supported by a curve in R^3
  Reviews in Mathematical Physics **Vol. 16** no. 5, 559–582 (2004)

- **H11** P. Exner, S. Kondej,
  Bound states due to a strong $\delta-$interaction supported by a curved surface
  Journal of Physics A : Mathematical and General **Vol. 36** no. 2, 443–457 (2003)

4c. Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników.

4c0. Wprowadzenie
Badania wchodzące w skład osiągnięcia naukowego należą do obszaru fizyki matematycznej, a dokładniej analizy spektralnej szczególnej klasy operatorów Schrödingera. Dedykowane są one układom kwantowo-mechanicznym, w których cząstki poruszają w polu bardzo krótkozasięgowych potencjałów. Aby opisać dokładniej zagadnienie rozważmy potencjał opisywany przez funkcję ciągłą $V_\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, której nośnik oznaczać będziemy $\Gamma := \operatorname{supp} V_\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Hamiltonian (nierelatywistyczny) takiego układu przyjmuje postać:

$$-\Delta + V_\Gamma\,, \tag{1}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace działającym w odpowiedniej przestrzeni Hilberta zdefiniowanej w zależności od specyfiki zagadnienia.
Załóżmy, że cząstka kwantowa porusza się w materiale półprzewodnikowym, który ma charakter drutu lub warstwy. Z drugiej jednak strony, uwięziona w półprzewodniku cząstka, ma możliwość tunelowania poza jego strukturę, czyli efektywnie przestrzeń dostępną cząstce stanowi np. $\mathbb{R}^d$. Uzasadnione jest wtedy modelowanie potencjału V_Γ za pomocą dystrybucji Diraca. Rozważmy przykładowy drut półprzewodnikowy; Γ opisuje wtedy geometrię drutu (na przykład odcinek prosty, okrąg, itp.)[1]. Hamiltonian takiego układu można zapisać heurystycznie:

$$-\Delta + \alpha\delta(x-\Gamma)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

[1]Dokładniejszy opis możliwych zastosowań prezentujemy w dalszej części pracy.

gdzie α odpowiada stałej oddziaływania. W literaturze, potencjały opisane symbolicznie przez deltę Diraca, nazywa się zwykle *delta potecjałami*, *delta odziaływaniem* lub *potecjałami (zaburzeniami) singularnymi.*[2] Hamiltonian odpowiadający wyrażeniu (2), którego konstrukcję matematyczną przedstawiamy w następnym rozdziale oznaczać będziemy $H_{\alpha,\Gamma}$.

Jednym z najbardziej nurtujących zagadnień w modelach z delta potencjałami jest *związek pomiędzy geometrią* Γ *a własnościami spektralnymi* $H_{\alpha,\Gamma}$. U podstaw tego problemu leży fakt, że *deformacja* Γ *działa jak potecjał, który wytwarza stany związane.* Oznacza to, na przykład, że gdy Γ jest prostą w $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, wtedy widmo dyskretne operatora $H_{\alpha,\Gamma}$ jest puste. Jednak *lokalna deformacja* Γ *powoduje pojawienie się punktów widma dyskretnego wraz z odpowiadającymi im stanami związanymi.* Wynik powyższy został udowodniony przez P. Exnera i T. Ichinose w roku 2001 dla tzw. słabo osobliwych potencjałów, por. [19]. Rok później, w czasie mojego stażu podoktorskiego w Czech Academy of Science, wspólnie z P. Exnerem, udowodniłam istnienie stanów związanych dla silnie osobliwych potencjałów, por. [24].

Wynik ten ma charakter twierdzenia „o istnieniu" i stał się punktem wyjścia do postawienia dalszych pytań, które dawałyby dokładniejszy jakościowo-ilościowy obraz. Pytania te koncetrowały się wokół następujących kwestii:

- Charakterystyka własności Γ zapewniających stabilność widma istotnego.
- Charakterystyka widma dyskretnego za pomocą własności geometrycznych Γ.
- Zjawisko stanów rezonansowych dla szczególnych klas Γ.

Zagadnienia te były tym bardziej nurtujące, że delta potencjały służą do modelowania warstw i drutów kwantowych, w których dopuszcza się możliwość tunelowania poza drutem [3]. Geometria tych struktur determinuje własności spektralne znajdujących się w nich cząstek. *Projektując wygięcie drutu możemy na przykład wytworzyć stany związane lub rezonansowe a także wpływać na parametery charakteryzujące zjawisko rozproszeń.*

W szerszej klasie modeli nie jest jednak możliwe uzyskanie dokładnych rozwiązań zagadnienia na wartości własne. Dlatego też rozważa się asymptotyki, które pozwalają na scharakteryzowanie pewnych własności spektrum. Celem prac stanowiących podstawę opisywanego osiągnięcia naukowego była analiza odpowiednich asymptotyk, które w zależności od charakteru oraz badanych wielkości spektralnych podzielić można następująco:

- **Asymptotyki spektralne w modelach z silnym oddziaływaniem; wpływ geometrii na spektrum dyskretne.** Niniejsza linia badań dotyczy analizy widma dyskretnego dla modeli, w których delta potencjał scharakteryzowany

[2] W literaturze stosuje się również nazwy „zero range potential" lub „zero Lebesgue measure potential". Są one szerszym pojęciem niż delta potencjały.

[3] W języku angielskim stosowany jest termin „leaky quantum wires".

przez stałą oddziaływania α, ma charakter silny. Celem badań jest wyrażenie własności widma dyskretnego $H_{\alpha,\Gamma}$ przez *lokalne* wielkości geometryczne Γ, które ujawniają się tego typu asymptotyce.

- **Asymptotyki spektralne w modelach ze słabym oddziaływaniem; wpływ geometrii na spektrum dyskretne**. Badania dotyczyły modeli, w których potencjał, scharakteryzowany przez stałą α, jest słaby. Ich celem było wyrażenie własności widma dyskretnego $H_{\alpha,\Gamma}$ przez *globalne* własności geometryczne Γ.

- **Asymptotyki spektralne w modelach rezonansowych.** Badania dotyczyły analizy układów opisywanych przez hamiltonian $H_{\alpha,\Gamma}$, w których pojawia się zjawisko rezonansów. Ich celem była charakterystyka wielkości rezonansowych (np. szerokości rezonansu) przez własności geometryczne Γ.

- **Asymptotyki spektralne wywoływane deformacja geometryczną.** Badania dotyczyły charakterystyki widma dyskretnego oraz wielkości obejmujących zagadnienie rozproszeń przez własności geometryczne Γ.

Dokładny opis wyników uzyskanych w poszczególnych pracach zamieszczony jest w rozdziale 4c3.

Należy podkreślić, że zagadnienia związane z potencjałami osobliwymi są eksplorowane w fizyce matematycznej od około trzech dekad. Były dyskutowane w różnych kontekstach. Z matematycznego punktu widzenia najszersze wyniki dotyczące samosprzężoności operatorów z potencjałami singularnymi oraz charakterystyki rezolwenty otrzymano w pracy [10] oraz artykułach A. Posilicano [59, 60]. W pracach [6, 2, 5, 53] prezentowane jest ujęcie zaburzeń singularnych w tzw. skali przestrzeni Hilberta.

Asymptotyczne zagadnienia spektralne dla modeli z delta potencjałami były dyskutowane między innymi w [15, 26, 29, 34, 35, 36]. Spektralne własności, w zależności od specyfiki geometrii układu, badane były w [31, 32, 33, 39, 57, 65]. W pracach [9, 11, 21, 22] analizowane były zagadnienia twz. silnie singularnych zaburzeń, których dokładniejszy opis prezentujemy w następnym rozdziale. Ponadto, delta potencjały w polu magnetycznym dyskutowane były na przykład w pracach [30, 40]. Warto wspomnieć również o badaniach nad operatorami niesamosprzężonymi z zaburzeniami singularnymi, por. [12, 41]. Wyżej wymieniona literatura stanowi jedynie przykłady publikacji w dziedzinie delta potencjałów. W dalszej dyskusji znajdują się odwołania adresowane do poszczególnych problemów. Ponadto, więcej referencji można znaleźć w monografiach [4, 7, 18, 23].

Przy okazji badań należący do geometrii spektralnej warto wspomnieć o falowodach kwantowych. Niektóre z modeli wykazują analogiczne własności spektralne do układów z delta potencjałami choć niejednokrotnie udowodnione odmiennymi metodami. Literatura w tym obszarze jest bardzo bogata; [16, 17, 23, 38, 56, 58] - stanowią przykładowe publikacje, które zawierają więcej odniesień do literatury w tym zakresie.

4c1. Metoda badań.

Osobną dyskusję poświęcamy opisowi stosowanych narzędzi badawczych. Wszystkie uzyskane główne wyniki wymagały istotnego rozwinięcia, połączenia lub uogólnienia istniejących już metod, prowadząc niejednokrotnie do wypracowania nowych narzędzi badawczych z zakresu analizy spektralnej.

Rozważmy drut półprzewodnikowy, gdzie Γ oznacza geometrię drutu. Załóżmy również, że cząstka poruszająca się takiej strukturze ma możliwość tunelowania poza nią. Hamiltonian takiego układu można zapisać symbolicznie:

$$-\Delta + \alpha\delta(x-\Gamma)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

gdzie α odpowiada stałej oddziaływania, natomiast Δ jest operatorem Laplace działającym w $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Delta potencjały, dla których kowymiar zbioru Γ jest niewiększy niż 1 nazywać będziemy *słabo singularnymi potencjałami (zaburzeniami)*. Natomiast, gdy kowymiar Γ jest większy niż 1 nazywać je będziemy *silnie singularnymi potencjałami (zaburzeniami)*. Silnie i słabo singularne potencjały istotnie różnią się, dlatego też wymagają osobnego omówienia.

Słabo singularne potencjały. Najprostszym, bardzo dobrze znanym przykładem jest punktowy potencjał w jednowymiarowym układzie. Odpowiedni hamiltonian można symbolicznie zapisać[4] :

$$-\Delta - \alpha\delta(x)\,. \tag{4}$$

Aby zdefiniować operator samosprzężony w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ zachowujący intuicyjne własności (4) standardowo rozważa się formę kwadratową:

$$\mathcal{E}[f] := \int_{\mathbb{R}} |\nabla f|^2 - \alpha|f(0)|^2\,, \quad f \in W^{2,2}(\mathbb{R})\,. \tag{5}$$

Operator stowarzyszony z powyższą formą, w sensie twierdzenia o pierwszej reprezentacji, jest samosprzeżony, por. [44]; oznaczać go będziemy dalej H_α. Operator ten ma widmo abosolutnie ciągłe $[0,\infty)$; natomiast gdy $\alpha > 0$ istnieje dodatkowo dokładnie jedna dyskretna wartość własna:

$$\sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha) = \{-\frac{\alpha^2}{4}\}\,, \tag{6}$$

por. [4]. Dziedzinę operatora H_α stanowią funkcje z $W^{2,2}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cap W^{2,1}(\mathbb{R})$ spełniające standardowy warunek skoku pochodnej:

$$f'(0^+) - f'(0^-) = -\alpha f(0)\,,$$

gdzie $f'(0^\pm)$ definiują odpowiednie granice pochodnej f.

[4]Mając na uwadze dalszą dyskusję, w której zainteresowani będziemy głównie potencjałami przyciągającymi wprowadzamy konwencję znaku minus przed stałą oddziaływania

Uogólniając powyższy przykład rozważmy model, w którym potencjał zlokalizowany jest na gładkiej hyperpowierzchni $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ o kowymiarze 1. Naturalnym uogólnieniem (3) jest wyrażenie symboliczne:

$$-\Delta - \alpha\delta(x - \Gamma)\,, \tag{7}$$

któremu możemy nadać sens operatora samosprzężonego $H_{\alpha,\Gamma}$ działającego w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^d)$ za pomocą formy

$$\mathcal{E}_{\alpha,\Gamma}[f] := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 - \alpha \int_\Gamma |f|^2\,, \quad f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{8}$$

Występująca w powyższym wyrażeniu całka określona na Γ jest poprawnie zdefiniowana w sensie śladu, por. [1].

W omawianej klasie słabo singularnych zaburzeń stała α wchodząca w skład definicji $H_{\alpha,\Gamma}$ za pomocą (8) opisuje siłę potencjału i podobnie, jak w przypadku regularnych potencjałów, wkład α jest addytywny. Dla $\alpha > 0$ potencjał ma charakter przyciągający (przed stałą α w formule (8) jest znak minus) natomiast, gdy $\alpha < 0$ potencjał jest odpychający. Przypadek $\alpha = 0$ oznacza, że potencjał znika.
Metody oparte na analizie rezolwenty dla słabo singularnych potencjałów rozwinięte zostały w pracach **H1**, **H2**, **H3**, **H4**, **H7**, **H8**, **H9**, **H11**.

Silnie singularne potencjały. Ponownie najbardziej znanym przykładem jest potencjał punktowy, jednak tym razem zlokalizowany w dwuwymiarowym układzie. Rozważmy formalne wyrażenie:

$$-\Delta + \delta_\alpha(x)\,, \tag{9}$$

gdzie Δ oznacza dwuwymiarowy operator Laplace. Hamiltonian, który odpowiada powyższemu wyrażeniu jest zdefiniowany jako samosprzężone rozszerzenie $-\Delta$: $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ lub, dokładniej, jako operator $-\Delta$ z pewnymi warunkami spełnianymi przez funkcje z jego dziedziny w punkcie $x = 0$. Warunki te dopuszczają logarytmiczną osobliwość, która jest naturalną konsekwencją osobliwości operatora Laplace w $2D$. Załóżmy, że dla pewnej funkcji $f \in D := C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ następujące granice:

$$\Xi(f) := -\lim_{|x|\to 0} \frac{1}{2\pi \ln |x|} f(x)\,, \quad \Omega(f) := \lim_{|x|\to 0} (f(x) - \Xi(f) \ln |x|) \tag{10}$$

są skończone. Zdefiniujmy zbiór

$$D(H_\alpha) := \{f \in D \,:\, 2\pi\alpha\Xi(f) = \Omega(f)\}\,, \tag{11}$$

oraz operator

$$H_\alpha \,:\, D(H_\alpha) \to L^2(\mathbb{R}^2)\,, \qquad H_\alpha f(x) = -\Delta f(x)\,, \quad x \neq 0\,. \tag{12}$$

Operator ten jest istotnie samoprzężony a jego samosprzężone rozszerzenie oznaczać będziemy tak samo, jak w przypadku słabo singularnych interakcji, tj. H_α. Definicja hamiltonianu oparta jest więc na narzuceniu relacji pomiędzy $\Xi(f)$ i $\Omega(f)$, które stanowią odpowiednio osobliwą i regularną część funkcji f. Należy wspomnieć, że w tym przypadku stała α nie wchodzi w definicję Hamiltonianu addytywnie. Można wykazać, por. [4], że operator H_α odpowiadający wyrażeniu (11) ma dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ dokładnie jedną wartość widma dyskretnego, która przyjmuje postać

$$\sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha) = \{\epsilon_\alpha\}\,, \qquad \epsilon_\alpha := -4\mathrm{e}^{2(-2\pi\alpha+\psi(1))}\,. \tag{13}$$

Operator H_α wytwarza więc stan związany dla każdego α. Dla $\alpha \to -\infty$ odpowiadająca wartość własna dąży do $-\infty$, natomiast dla $\alpha \to \infty$ wartość własna ξ_α dąży do 0. Udział stałej α nie ma więc charakteru addytywnego, stąd też nie używamy symbolu (4).

Ponownie naturalnym uogólnieniem operatora H_α jest hamiltonian z zaburzeniem zlokalizowanym na krzywej $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Zakładamy, że Γ jest krzywą klasy C^1 skończoną lub nie, nie posiadająca samoprzecięć[5]. Rozważmy symboliczne wyrażenie

$$-\Delta + \delta_\alpha(x - \Gamma)\,. \tag{14}$$

Powyższemu wyrażeniu możemy nadać sens operatora samosprzężonego w $L^2(\mathbb{R}^3)$ definiując $H_{\alpha,\Gamma}$ w analogii do (11) i (12). Aby to nieco uściślić rozważmy ustalony punkt $x_0 \in \Gamma$, natomiast Π niech oznacza płaszczyznę prostopadłą do Γ w punkcie x_0; $x_0 \in \Pi$. Odpowiednie granice $\Xi(f)$ i $\Omega(f)$ są zdefiniowane dla $|x - x_0| \to 0$ w płaszczyźnie Π, tzn. $x \in \Pi$ i $x_0 \in \Gamma$. Ostatecznie wyznaczając granice dla każdego $x_0 \in \Gamma$ otrzymujemy funkcje z przestrzeni $L^2(\Gamma)$, o których zakładamy, że spełniają warunki analogiczne do (11) [6].

Silnie przyciągający delta potencjał. Zgodnie z przyjętą wyżej umową a także pozostając w spójności z konwencją przyjętą w publikacjach asymptotyka $\alpha \to \infty$ oznacza silnie przyciągający potencjał dla słabo osobliwych zaburzeń oraz $\alpha \to -\infty$ dla silnie osobliwych zaburzeń.

Rezolwenta. Głównym narzędziem do badania własności spektralnych operatorów jest rezolwenta. W przypadku potencjałów regularnych istnieją znane twierdzenia i rozwinięte metody, które umożliwiają analizę spektralną w oparciu o badanie rezolwenty, por. [44]. W analizowanym cyklu prac posługiwano się jednak konstrukcją rezolwenty dla potencjałów singularnych. Prace A. Posilicano [59, 60] dostarczają wielu wyników, które były pomocne w analizie rezolwenty dla modeli z delta potencjałami. Należy jednak podkreślić, że prace Posilicano utrzymane są na wysokim poziomie ogólności i zastowanie ich wyników dla szczególnych klas modeli wymaga osobnej analizy prowadzącej do nowych twierdzeń.

W dalszej części prezentujemy konstrukcję i własności rezolwenty dla potencjałów singularnych. Ponieważ konstrukcja ta oraz wynikająca z niej analiza spektralna,

[5] Ograniczamy się tutaj do krzywych w przestrzeni trójwymiarowej, ponieważ tylko takie będą przedmiotem dyskusji dla silnie singularnych potencjałów.

[6] Zarówno tutaj, jak i dalszym omówieniu pomijamy szereg technicznych szczegółów.

istotnie różni się dla potencjałów słabo i silnie singularnych dlatego też przypadki te rozważone zostaną osobno.
Rezolwenta; słabo singularne potencjały. Rezolwenta hamiltonianów z potencjałami singularnymi jest naturalnym uogólnieniem formuły Kreina, por. [54], gdzie rolę regularnych potencjałów odgrywają odpowiednie zanurzenia rozumiane w sensie operatora śladu, por. [1].

Niech $R(z) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ oznacza rezolwentę „swobodnego" hamiltonianu, tj. $R(z) := (-\Delta - z)^{-1}$, gdzie $-\Delta : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Zdefnijmy odpowiedni operator zanurzenia,[7] $R_\Gamma(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, który działa $R_\Gamma(z)f := R(z) * f\delta(\cdot - \Gamma)$. Operator $R_\Gamma(z)^*$ jest zdefiniowany jako sprzężenie $R_\Gamma(z)$ i działa $R_\Gamma(z)^* : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Gamma)$. Ostatecznie definiujemy $\mathrm{R}_\Gamma(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, który działa $\mathrm{R}_\Gamma(z)f = R_\Gamma(z)^* * f\delta(\cdot - \Gamma)$. Załóżmy, że $z \in \rho(H_{\alpha,\Gamma})$, wtedy operator $I - \alpha\mathrm{R}(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ jest odwracalny a rezolwenta operatora $H_{\alpha,\Gamma}$ przybiera postać:

$$R_{\alpha,\Gamma}(z) = R(z) + R_\Gamma(z)\alpha(I - \alpha\mathrm{R}(z))^{-1}R_\Gamma(z)^* . \tag{15}$$

Ponadto

$$z \in \sigma_{\mathrm{d}}(H_{\alpha,\Gamma}) \Longleftrightarrow z \in \ker(I - \alpha\mathrm{R}(z)) \tag{16}$$

oraz $\dim\ker(H_{\alpha,\Gamma} - z) = \dim\ker(I - \alpha\mathrm{R}(z))$, por. [10]. Powyższy wynik pozwala „przesunąć" problem badania wartości własnych operatora różniczkowego z pewnymi warunkami brzegowymi na Γ na analizę $\ker(I - \alpha\mathrm{R}(z))$, gdzie $\mathrm{R}(z)$ jest operatorem całkowym w $L^2(\Gamma)$.
Twierdzenie (16) stanowi *uogólnienie zasady Birmana–Schwingera znanej dla potencjałów regularnych.*

Rezolwenta; silnie singularne potencjały. Analogicznie, jak w przypadku słabo singularnych potencjałów definiujemy odpowiednie zanurzenia:

$$R_\Gamma(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\mathbb{R}^3) , \qquad R_\Gamma(z)^* : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\Gamma)$$

operatora $R(z) := (-\Delta - z)$ do przestrzeni $L^2(\Gamma)$; symbol Δ oznacza operator Laplace działający w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^3)$. W przypadku silnie singularnych oddziaływań nie możemy jednak zdefiniować analogu operatora $\mathrm{R}(z)$ ze względu na logarytmiczną osobliwość $R(z)$. W zamian za to definiujemy operator $Q(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, który stanowi odpowiednią regularyzację i spełnia równanie pseduorezolwenty, (por. wyniki [59] oraz zastosowania [24]). Rezolwenta operatora $H_{\alpha,\Gamma}$ odpowiadającgo (9) ma postać:

$$R_{\alpha,\Gamma}(z) = R(z) + R_\Gamma(z)(\alpha - Q(z))^{-1}R_\Gamma(z)^* , \tag{17}$$

a ponadto, zachodzi

$$z \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\alpha,\Gamma}) \Longleftrightarrow z \in \ker(\alpha - Q(z)) \tag{18}$$

[7] W istocie, $R_\Gamma(z)$ jest operatorem całkowym i przez symbol $R_\Gamma(z) * g$ rozumiemy splot jego jądra z funkcją g.

oraz $\dim\ker(H_{\alpha,\Gamma} - z) = \dim\ker(\alpha - Q(z))$. Warunek (18) stanowi uogólnienie zasady Birmana–Schwingera dla silnie singularnych potencjałów. Metody oparte na analizie rezolwenty dla silnie singularnych potencjałów rozwinięte zostały w pracach **H1**, **H5**, **H6**, **H9**, **H10**.

Rezonanse. Podstawowym narzędziem matematycznym służącym do badania zjawiska rezonansów jest rezolwenta. Analiza rezonansów jest możliwa dzięki przedłużeniu analitycznemu rezolwenty na drugi (dolny) płat Riemana a następnie rozszerzeniu warunku Birmana-Schwingera dla $z \in \mathbb{C}_-$. Dokładniej, rozważmy operator $fR_{\alpha,\Gamma}(z)g$, gdzie $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $R_{\alpha,\Gamma}(z)$ jest zdefiniowane za pomocą wzoru (15) lub (17) [8]. Załóżmy dalej, że dla każdego $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ funkcja o wartościach operatorowych $z \mapsto fR_{\alpha,\Gamma}(z)g$ ma rozszerzenie analityczne dla $z \in \mathbb{C}_-$. Informacja o biegunie rezolwenty, któremu odpowiada rezonans jest zawarta w operatorze $\Gamma^{II}(z)$ oznaczającym przedłużenie analityczne $I - \alpha \mathrm{R}(z) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, por. (15) lub $(\alpha - Q(z)) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, por. (17). Liczba $z \in \mathbb{C}_-$ spełniająca warunek

$$\ker \Gamma^{\mathrm{II}}(z) \neq \{0\} ,$$

stanowi biegun rezolwenty, określając jednocześnie rezonans. Metody rezonansowe dla silnie i słabo singularnych zaburzeń rozwinięte zostały w pracach **H1**, **H4**, **H5**, **H9**.

Oprócz opisanych powyżej metod opartych na analizie rezolwenty, badania spektralne prowadzone w pracach **H1-H11** łączyły w sobie różnorakie narzędzia badawcze pochodzące między innymi z takich obszarów jak: analiza operatorowa i teoria form kwadratowych, metody wariacyjne, technika Dirichlet-Neumann bracketing'u, równania różniczkowe cząstkowe, teoria Floqueta-Blocha, przestrzenie Soboleva i twierdzenia o zanurzeniu, elementy geometrii różniczkowej, teoria rozproszeń a także analityczna teoria zaburzeń stosowana do dowodów pomocniczych twierdzeń.

4c2. Możliwe zastosowania technologiczne.

Ruch elektronów w układach trójwymiarowych może być ograniczony do układów niżej wymiarowych. Realizacja takiego zadania odbywa się przez pułapkowanie elektronów w krótkozasięgowych studniach potencjału, które prowadzą do skwantowania pędu w jednym kierunku. Jeśli odległość pomiędzy odpowiednimi skwantowanymi poziomami energetycznymi jest dostatecznie duża to elektrony zostają zamrożone w stanie podstawowym i w konsekwencji ich ruch nie jest możliwy w jednym kierunku. W konsekwencji otrzymujemy dwuwymiarowy gaz elektronowy. Podobny efekt może być osiągnięty dla dwuwymiarowej studni potencjału, która pozostawia elektrony swobodne w jednym wymiarze tworząc druty kwantowe. Wytworzenie studni w kolejnym wymiarze prowadzi do powstania kropki kwantowej.

[8] $R_{\alpha,\Gamma}(z)$ jest operatorem całkowym z jądrem $R_{\alpha,\Gamma}(x,y)$. Symbol $fR_{\alpha,\Gamma}(z)g$ oznacza operator którego jądro ma postać $f(x)R_{\alpha,\Gamma}(z)(x,y)g(y)$

Studnie kwantowe mogą być zaprojektowane z użyciem półprzewodników różnych typów, w których różnica w przerwie energetycznej pomiędzy odpowiednimi pasmami jest duża. Półprzewodniki takie połączone tworzą twz. heterozłącze. Odpowiedni skok energetyczny pomiędzy pasmami przewodnictwa lub pasmami walencyjnymi tworzą studnię potencjału. Cienka warstwa materiału, który posiada wąskie pasmo zabronione obłożona dwiema warstwami materiału, który posiada szerokie pasmo zabronione jest tzw. podwójnym heterozłączem, które z kolei tworzy pojedynczą studnię potencjału. Naturalnym uogólnieniem tego modelu jest układ wielu studniu kwantowych.

Z inżynierskiego punktu widzenia studnie potencjału są tworzone z półprzewodników takich jak arsenek galu GaAs, obłożony dwiema warstwami materiału o większej szerokości pasma zabronionego jak arsenek aluminium AlGaAs. (Inne przykłady to azotek indu galu otoczony warstwami azotku indu).

Dla rodziny materiałów GaAs/AlGaAs parametry sieci są praktycznie niezależne od udziału procentowego aluminium. Z tego powodu materiały te są szeroko eksploatowane do produkcji struktur półprzewodnikowych. Używanie innych materiałów prowadzi do powstania wewnętrznych naprężeń, które z kolei wpływają na strukturę pasmową.

Modele warstw, drutów i kropek kwantowych stanowią bardzo aktywnie rozwijającą się linię badań. Literatura poświęcona tym zagadnieniom jest bardzo bogata - wymienić można [13, 14, 23, 37, 43, 58]. Są to jednak tylko przykładowe monografie w żaden sposób nie wyczerpujące literatury przedmiotu. Nanodruty są stosowane w technologiach trazystorowych, wykorzystywanych powszechnie jako podstawowy element obwodów elektrycznych.

Z kolei kropki kwantowe znajdują zastosowanie w biologii i medycynie, w szczególności w diagnostyce medycznej. Testy biologiczne pokazują, że kropki kwantowe ze względu na swoje rozmiary są precyzyjnymi znacznikami. Szybciej i efektywniej rozpoznają poszukiwane substancje niż barwniki organiczne.

Współczesna technologia pozwala na zaprojektowanie warstw lub drutów o, w zasadzie, dowolnej geometrii. Celem publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego jest stworzenie narzędzi matematycznych służących do badania hamiltonianów układów, w których cząstki pułapkowane są w niżej wymiarowych strukturach a następnie wydobycie związku pomiędzy geometrią a własnościami spektralnymi elektronów w takich układach. Należy podkreślić, że rozważane tu modele dopuszczają możliwość tunelowania poza strukturę półprzewodnikową.

4c3. Omówienie wyników naukowych zawartych w poszczególnych pracach.

Poniższy opis stanowi omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Analiza ta jest spójna z podziałem na cztery rodzaje badanych asymptotyk zaproponowanym w rozdziale 4c0. Należy podkreślić, że w poniższym opisie zrezygnowano niejednokrotnie z poziomu ogólności, na którym wykazane zostały oryginalne wyniki, uzyskując w ten sposób większą klarowność prezentacji.

Asymptotyki spektralne w modelach z silnym oddziaływaniem; wpływ geometrii na spektrum: H11, H10.

W tym nurcie badań rozważana była asymptotyka spektralna, gdy delta oddziaływanie ma charakter silnie przyciągający, tzn., gdy $\alpha \to \infty$ dla słabo singularnych potencjałów i $\alpha \to -\infty$ dla silnie singularnych potencjałów. Do tej linii badań należą dwie najstarsze prace **H11** i **H10**, gdzie analizowane było zachowanie spektrum dyskretnego poniżej progu spektrum istotnego.

Dla $\alpha \to \pm\infty$, gdy potencjał jest odpowiednio słabo/silnie singularny, jest naturalnym oczekiwać, że w widmie dyskretnym ujawnią się lokalne własności geometryczne Γ. Wielkością charakteryzującą lokalną geometrię jest na przykład krzywizna Γ.

W artykule **H11** analizowany był model, w którym delta oddziaływanie jest zlokalizowane na nieskończonej powierzchni $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ klasy C^4, której tensor metryczny jest jednostajnie eliptyczny. Niech K i M oznaczają odpowiednio krzwiznę Gaussa i krzywiznę średnią. Dodatkowo zakładamy, że Γ *jest asymptotycznie płaska* w następującym sensie:

$$K,\, M \to 0\,, \text{ jeśli promień geodezyjny r} \to 0\,.$$

W przestrzeni $L^2(\Gamma)$ definiujemy pomocniczo operator porównawczy:

$$S := -\Delta_{BL} + K - M^2\,,$$

gdzie Δ_{BL} oznacza operator Beltrami–Laplaca na Γ, natomiast $K - M^2$ odgrywa rolę potencjału, który można wyrazić również za pomocą krzywizn głównych k_1 i k_2 w następujący sposób:

$$K - M^2 = -\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2\,.$$

Z powyższej formuły wynika, że potencjał operatora porównawczego ma charakter przyciągający. Niech $H_{\alpha,\Gamma}$ oznacza operator odpowiadający (7) zdefiniowany za pomocą formy kwadratowej (8). Główne wyniki pracy **H11** sformułować można:

$\star$ **H11a** *Spektrum istotne.* Próg spektrum istotnego jest ograniczony z dołu przez wartości funkcji $\alpha \mapsto \epsilon(\alpha)$, która posiada następującą asymptotykę $\epsilon(\alpha) \to -\frac{\alpha^2}{4}$, gdy $\alpha \to \infty$.

$\star$ **H11b** *Asymptotyka dyskretnych wartości własnych.* Dla α dostatecznie dużego operator $H_{\alpha,\Gamma}$ posiada niepuste spektrum dyskretne poniżej progu widma istotnego oraz odpowiednie wartości własne wykazują następującą asymptotykę:

$$\lambda_j(\alpha) = -\frac{1}{4}\alpha^2 + \mu_j + \mathcal{O}(\alpha^{-1}\log\alpha)\,,$$

gdy $\alpha \to \infty$, gdzie μ_j jest j-tą wartością własną operatora S. Powyższa formuła potwierdza hipotezę, że *wartości własne $H_{\alpha,\Gamma}$ „zachowują pamięć” o lokalnych własnościach geometrycznych Γ.*

W pracy **H10** badane były asymptotyki spektralne dla modelu z delta oddziaływaniem silnie singularnym zlokalizowanym w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą zamkniętą klasy C^4, nie posiadającą samoprzecięć a $H_{\alpha,\Gamma}$ oznacza operator odpowiadający wyrażeniu (14). Operator porównawczy ma postać

$$S := -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{1}{4}k^2\,, \tag{19}$$

gdzie k oznacza krzywiznę Γ.

Główne wyniki pracy **H10** można scharakteryzować następująco:

⋆ **H10a** *Asymptotyka dyskretnych wartości własnych.* Wartości własne operatora $H_{\alpha,\Gamma}$ posiadają następującą asymptotykę

$$\xi_\alpha + \mu_j + \mathrm{e}^{\pi\alpha}\,, \;\text{ gdy }\; \alpha \to -\infty\,, \tag{20}$$

gdzie μ_j jest j-tą wartością własną operatora S, por. (19).

⋆ **H10b** *Zliczanie dyskretnych wartości własnych.* Funkcja zliczająca liczbę dyskretnych wartości własnych ma postać:

$$\sharp\sigma_{\mathrm{d}}(H_{\alpha,\Gamma}) = \frac{L}{\pi}\,(-\xi_\alpha)^{1/2}\,(1+\mathrm{e}^{\pi\alpha})\;. \tag{21}$$

W rzeczywistości powyższy wynik nie wymaga założenia, że krzywa jest zamknięta; analogiczne asymptotyka zachodzi, gdy Γ ma swobodne końce.
Warto nadmienić, że dodatkowe wyniki dotyczące spektrum dla modelu z oddziaływaniem na krzywej skończonej $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ o swobodnych końcach uzyskano w pracy [26]. Ponadto, analogiczne modele były analizowane w pracach [34, 35] oraz [29], gdzie rozważano zaburzenie typu delta na niezamkniętej powierzchni w $\mathbb{R}^3$.
Wyniki **H10a** i **H10b** pokazują, że w istocie *krzywizna* Γ *działa jak potencjał przyciągający, zdolny do wytworzenia stanów związanych. Formuła (20) ujawnia, że* $-\frac{k^2}{4}$ *pełni rolę potencjału odpowiedzialnego za zachowanie widma dykretnego dla* $\alpha \to -\infty$.
Osobna analiza została poświęcona modelowi, w którym Γ jest nieskończona lecz asymptotycznie prosta. Widmo istotne ma wtedy postać $\sigma_{\mathrm{ess}} = [\xi_\alpha, \infty)$ natomiast asymptotyka wartości własnych jest analogiczna do (20).
W pracy **H10** rozważano również modele periodyczne, a dokładniej, gdy Γ należy do klasy krzywych periodycznych. Standardowo przeprowadzono rozkład Floqueta-Blocha hamiltonianu $H_{\alpha,\Gamma}$:

$$UH_{\alpha,\Gamma}U^{-1} = \int_{[-\pi/K,\pi/K)}^{\oplus} H_{\alpha,\Gamma}(\theta)\mathrm{d}\theta\,,$$

gdzie K jest stałą określającą periodyczność Γ a $U\,:\,L^2(C) \to L^2(C)$ jest operatorem unitarnym, natomiast C określa podstawową komórkę w $\mathbb{R}^3$ związaną z Γ. W pracy **H10** pokazano, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $\alpha(n)$ taka, że $\sharp\sigma_{\mathrm{d}}(H_{\alpha,\Gamma}(\theta)) \geq n$

dla $\alpha \leq \alpha(n)$ oraz $H_{\alpha,\Gamma}(\theta)$ posiada spektrum dyskretne, którego asymptotyka jest analogiczna do (20). Wynik ten niesie za sobą implikacje dla struktury pasmowej operatora $H_{\alpha,\Gamma}$.

$*$ **H10c** *Pasma zabronione operatora $H_{\alpha,\Gamma}$.* Jeśli operator S posiada nieskończoną ilość otwartych przerw spektralnych w $\sigma(S)$ to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\alpha(n) \in \mathbb{R}$ taka, że operator $H_{\alpha,\Gamma}$ posiada przynajmniej n otwartych przerw spektralnych, gdy $\alpha < \alpha(n)$. Jeśli liczba przerw w $\sigma(S)$ jest skończona i wynosi N to $\sigma(H_{\alpha,\Gamma})$ posiada tą samą własność dla $-\alpha$ dostatecznie dużego.

Asymptotyki spektralne w modelach ze słabym oddziaływaniem: H3.

Artykuł **H3** podejmuje problem asymptotyki spektralnej, gdy oddziaływanie ma charakter słaby, tzn $\alpha \to 0$. Hamiltonian układu $H_{\alpha,\mu}$ działa w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^2)$ i odpowiada formalnemu wyrażeniu:

$$-\Delta - \alpha\mu\,, \qquad \alpha > 0\,, \tag{22}$$

gdzie μ oznacza miarę Radona o nośniku na zbiorze zwartym w $\mathbb{R}^2$ należącą do uogólnionej klasy Kato, por. [10]. W szczególności, μ może być zdefiniowane przez deltę Diraca; wtedy hamiltonian odpowiada wyrażeniu (7). Ponieważ potencjał zlokalizowany jest na zbiorze zwartym można wykazać, że $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\alpha,\mu}) = [0,\infty)$. W artykule **H3** zbadano asymptotykę spektrum dyskretnego gdy $\alpha \to 0$. Wykazano między innymi następujące asymptotyczne zachowania.

$\star$ **H3a** *Spectrum dyskretne: jednoznaczność i asymptotyka.* Dla $\alpha > 0$ dostatecznie małego widmo dyskretne spełnia warunek:

$$\sharp\sigma_{\mathrm{d}}(H_{\alpha,\mu}) = 1$$

oraz odpowiadająca wartość własna posiada asymtotykę

$$\lambda(\alpha) = -\left(C_\mu + o(1)\right)\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha\mu(\mathbb{R}^2)}\right)\,, \tag{23}$$

dla $\alpha \to 0^+$, gdzie C_μ jest stałą, por. **H3**.

W omawianej pracy otrzymano również asymptotykę wektora własnego odpowiadającego wartości $\lambda(\alpha)$:

$\star$ **H3b** *Asymptotyka wektora własnego.* Niech $k_\alpha = (-\lambda(\alpha))^{1/2}$. Dla $\alpha \to 0^+$ wektor własny operatora $H_{\alpha,\mu}$ odpowiadającego wartości (22) posiada następującą postać

$$f_\alpha(\cdot) = \frac{k_\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} K_0(k_\alpha|\cdot - y|)\mathrm{d}\mu(y) + O\left(\frac{1}{\ln k_\alpha}\right)\,.$$

Formuła (23) stanowi rekonstrukcję widma dykretnego dla $\alpha \to 0^+$. Wielkości geometryczne, które opisują tą asymptotykę, C_μ i $\mu(\mathbb{R}^2)$ mają charakter globalny.

W przypadku delta potencjałów $\mu(\mathbb{R}^2)$ oznacza długość Γ. Stąd wniosek, że *dla słabego oddziaływania w widmie dyskretnym jest zachowywana informacja jedynie o globalnych cechach geometrycznych* Γ.

Warto wspomnieć, że w pracy powyższej analizowano również modele, w których nośnikiem μ jest zbiór niezwarty. Otrzymano ograniczenia górne i dolne na wartości widma dykretnego.

Asymptotyki spektralne w modelach rezonansowych: H1, H4, H5, H9.

Jest to najszerzej rozwinięta linia badań wchodząca w skład osiągnięcia naukowego. Rozważano w niej modele, w których pojawia się zjawisko rezonansu. W cyklu dyskutowanych prac wyróżnić można dwa typy rezonansów - mianowicie - indukowanych przez dopuszczenie tunelowania oraz złamanie symetrii. Celem prac było wydobycie związku pomiędzy własnościami spektralnymi rezonansu a geometrią Γ. W pracy **H9** analizowano prosty model, w którym $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ składa się z prostej $\Sigma := \{(x_1,0)\ :\ x_1\in\mathbb{R}\}$ oraz skończonej liczby punktów $\Pi := \{y^{(i)}\}_{i=1}^n$, gdzie $y^{(i)}\in\mathbb{R}^2\setminus\Sigma$. Rozważano własności spektralne hamiltonianu, który odpowiada wyrażeniu:

$$-\Delta-\alpha\delta(x-\Sigma)+\sum_{i=1}^{n}\delta_{\beta_i}(x-y^{(i)})\,.$$

Wyniki zilustrujemy na przykładzie, gdy Π składa się z jednego punktu $\{y\}$ zlokalizowanego w odległości a od prostej Σ; odpowiedni hamiltonian oznaczymy $H_{\alpha,\beta,a}$. Dla dużych wartości a, tzn. gdy punkt i prosta oddziaływują na siebie słabo układ ma „tendencję do separacji”. Możemy wtedy oczekiwać, że operator $H_{\alpha,\beta,a}$ ujawni zarówno własności spektralne układu z jednym punktem, jak i własności modelu, w którym oddziaływanie skoncetrowane jest tylko na prostej Σ. Własności spektralne $H_{\alpha,\beta,a}$ zależą więc od relacji pomiędzy ϵ_β - dyskretną wartością własną operatora H_β odpowiadającego (14) oraz $-\frac{\alpha^2}{4}$ - progiem widma istotnego operatora H_α odpowiadającego formule (4).

Najważniejsze wyniki pracy **H9** scharakteryzować można następująco:

$\star$ **H9a** *Asymptotyka dyskretnych wartości własnych.* Operator $H_{\alpha,\beta,a}$ ma dokładnie jedną dyskretną wartość własną E_a, która $\lim_{a\to\infty}E_a=\epsilon_\beta$ jeśli $\epsilon_\beta\le-\frac{\alpha^2}{4}$. Natomiast w przypadku, gdy $\epsilon_\beta>-\frac{\alpha^2}{4}$ wartość własna E_a jest „chwytana” przez próg widma istotnego, tzn. $\lim_{a\to\infty}E_a=-\frac{\alpha^2}{4}$.

$\star$ **H9b** *Rezonanse.* Załóżmy, że $\epsilon_\beta>-\frac{\alpha^2}{4}$. Wtedy rezolwenta operatora $H_{\alpha,\beta,a}$ posiada analityczne przedłużenie na drugi płat Riemanna, na którym znajduje się biegun zlokalizowany w punkcie $z(b)$. Funkcja $z\mapsto z(b)$ zachowuje następującą asymptotykę

$$z(b)=\mu(b)+i\nu(b)\,,\ \ \mu(b)\in\mathbb{R}\,,\ \nu(b)<0\,,$$

gdzie $b := \mathrm{e}^{-a\sqrt{-\epsilon_\beta}}$ oraz

$$\mu(b) = \epsilon_\beta + \mathcal{O}(b)\,, \quad \nu(b) = \mathcal{O}(b)\,.$$

Powyższe wyniki ukazują w jaki sposób zachowywana jest pamięć o wartości własnej operatora H_β w układzie rządzonym przez hamiltonian $H_{\alpha,\beta,a}$ gdy $a \to \infty$. *W zależności od relacji między α i β informacja o ϵ_β odciska się w spektrum dyskretnym lub własnościach rezonansu, którego szerokość zdefiniowana jest przez $b = \mathrm{e}^{-a\sqrt{-\epsilon_\beta}}$.*

W pracy **H9** rozważano również *zjawisko rezonansów indukowane złamaniem symetrii.* Ponownie zilustrujemy wyniki na najprostszym przykładzie. Rozważmy parę punktów, w których zlokalizowany jest potencjał z takimi samymi stałymi oddziaływania. Układ taki posiada dwie dyskretne (ujemne) wartości własne μ_{sym} i μ_{antisym} odpowiadające symetrycznej i antysymetrycznej funkcji własnej. Wprowadzając do układu oddziaływanie na prostej Σ z zachowaniem symetrii lustrzanej powodujemy, że μ_{antisym} „przeżywa” tą procedurę pozostając wartością własną układu skomponowanego z Σ i dwóch punktów. Wyniki zawarte pracy **H9** dotyczące dwupunktowego układu z prostą, podsumować można następująco:

⋆ **H9c** *Zanurzone wartości własne indukowane przez symetrię.* Operator $H_{\alpha,\beta}$ posiada przynajmniej jedną izolowaną wartość własną i najwyżej dwie. W zależności od stałej oddziaływania β wartość μ_{antisym} może znajdować się pod lub nad progiem widma istotnego $-\frac{\alpha^2}{4}$. Jeśli $\mu_{\mathrm{antisym}} > -\frac{\alpha^2}{4}$ wtedy $H_{\alpha,\beta}$ ma dokładnie jedną izolowaną wartość własną i jedną μ_{antisym} zanurzoną w widmie istotnym. Jeśli $\mu_{\mathrm{antisym}} < -\frac{\alpha^2}{4}$, wtedy operator $H_{\alpha,\beta}$ ma dokładnie dwie izolowane wartości własne. Większą z nich stanowi liczba μ_{antisym}.

W pracy **H9** podjęto również badania poświęcone zjawisku rezonansów, które pojawiają, kiedy symetria w dwupunktowym układzie z prostą zostanie złamana, na przykład przez przesunięcie jednego z punktów. *Zanurzona wartość własna wydobywa się wówczas z widma istotnego definiując rezonans,* a dokładniej mamy:

⋆ **H9d** *Rezonanse indukowane przez złamanie symetrii.* Załóżmy, że dwa punktowe oddziaływania są umiejscowione w odległości a i $a+\delta$ na prostej prostopadłej do Σ. Wtedy wartość własna przesuwa się na drugi płat Riemanna rezolwenty definiując jej biegun w punkcie $z(\delta) = \upsilon(\delta) + i\iota(\delta)$, gdzie

$$\upsilon(\delta) = \mu_2 + \mathcal{O}(\delta)\,, \quad \iota(\delta) = \mathcal{O}(\delta^2)\,.$$

Jawne formuły na najniższy rząd zaburzeń dla $\upsilon(\cdot)$ i $\iota(\cdot)$ zostały wyprowadzone w pracy **H9**.

Wyniki opisane w dwóch powyższych punktach *wykazują istnienie zanurzonych wartości własnych w modelu zachowującym symetrię oraz zjawisko rezonansów po jej złamaniu. Własności spektralne takie jak szerokość rezonansu, zależą od parametrów łamiących symetrię.*

Należy podkreślić, że artykule **H9** rozważano znacznie szerszą klasę modeli, gdzie punktowe oddziaływanie składa się ze skończonej liczby „kropek”. Analizowano również problem rozproszeń. Zrekonstruowana została macierz rozproszeń oraz uogólnione wektory własne.

W pracy **H4** analizowano kolejny model rezonansowy, w którym delta oddziaływanie zlokalizowane jest na zbiorze $\Sigma \in \mathbb{R}^2$ składającym się z dwóch równoległych nieskończonych prostych, dokładniej

$$\Sigma := \Sigma_- \cup \Sigma_+ \qquad \text{gdzie} \qquad \Sigma_\pm := \mathbb{R} \times \{\pm a\}\,. \tag{24}$$

Zakładamy, że na każdej z wyżej zdefiniowanych prostych $\Sigma_\pm$ jest skoncetrowany potencjał:

$$V(x) := \begin{cases} -\alpha + V_+(x) & \text{gdy} \quad x \in \Sigma_+ \\ -\alpha + V_-(x) & \text{gdy} \quad x \in \Sigma_-\,, \end{cases} \tag{25}$$

gdzie $V_\pm : \Sigma_\pm \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha > 0$. W odróżnieniu od poprzednich modeli w układzie tym potencjał opisywany jest nie przez stałą, ale przez funkcję zlokalizowaną na nośniku delta potencjału. Własności $V_\pm$ mają istotne konsekwencje dla analizy spektralnej układu. Hamiltonian takiego układu zdefiniowany został za pomocą sumy form, por. (8); w dalszej dyskusji oznaczamy go jako H_{α,V_+,V_-}. W szczególnym przypadku, gdy $V_\pm = 0$, układ ma translacyjną symetrię i jego własności spektralne są zdeterminowane przez własności jednowymiarowego układu z dwupunktowym oddziaływaniem. Ten ostatni posiada przynajmniej jedną wartość własną a najwyżej dwie. Niech ξ_0 oznacza energię stanu podstawowego stanowiącą jednocześnie próg dolny jego widma.
Główne wyniki pracy **H4** scharakteryzować można następująco:

$\star$ **H4a** *Stabilność spektrum istotnego.* Jeśli funkcje $V_\pm$ zanikają w nieskończoności, to spektrum istotne operatora H_{α,V_+,V_-} jest stabilne względem zaburzenia $V_\pm$, co oznacza

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,V_+,V_-}) = \sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,0,0}) = [\xi_0, \infty)\,. \tag{26}$$

$\star$ **H4b** *Spektrum dyskretne, zanurzone wartości własne.* Jeśli potencjał $V_+ + V_-$ jest ujemny w sensie całki czyli $\int_{\mathbb{R}} V_+ + V_- < 0$ (zakładamy całkowalność $V_\pm$) to próg widma operatora H_{α,V_+,V_-} znajduje się poniżej ξ_0. Dlatego też

$$\sigma_{\text{disc}}(H_{\alpha,V_+,V_-}) \neq \emptyset\,.$$

Gdy układ zachowuje symetrię $V_\pm = V_0$, wtedy dla określonej relacji pomiędzy a, α i V_0 hamiltonian H_{α,V_0,V_0} posiada zanurzone wartości własne.

$\star$ **H4c** *Nierówność Hardy'ego.* Dla $V_\pm \geq 0$ zachodzi nierówność typu Hardy'go:

$$H_{\alpha,V_+,V_-} - \xi_0 \geq \varrho\,,$$

gdzie funkcja $\varrho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ nie jest identycznościowo zero. Nierówność ta jest spełniona w sensie formy kwadratowej i stanowi narzędzie do analizy stabilności widma operatora H_{α,V_+,V_-}. Dokładniej, *określa klasę potencjałów, które nie wytworzą dodatkowych wartości własnych pod progiem widma* ξ_0.

$\star$ **H4d** *Rezonanse indukowane przez złamanie symetrii.* Złamanie symetrii lustrzanej w układzie $V_\pm = V_0$, w którym istnieją zanurzone wartości własne $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ przez wprowadzenie odpowiedniego „zaburzacza" prowadzi do zjawiska rezonansów. W układzie scharakteryzowanym przez potencjały

$$V_+ = V_0 + \epsilon V_p\,, \qquad V_- = V_0\,,$$

gdzie V_p jest pewną funkcją z przestrzeni $L^2(\Sigma_+)$ pełniącą rolę „zaburzacza", rezonans ten zlokalizowany jest w pobliżu pierwotnej zanurzonej wartości własnej ν_k tj. dla $\epsilon = 0$. Dokładniej, rezolwenta posiada biegun usytuowany w:

$$z_k = \nu_k + \mu_k(\epsilon) + i\upsilon_k(\epsilon)\,,$$

gdzie $\mu_k(\epsilon) = a_k\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ oraz a_k odpowiada najniższemu członowi zaburzającemu w rzeczywistej składowej, natomiast $\upsilon_k(\epsilon) = b_k\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$, gdzie $b_k < 0$ ujawnia *złotą regułę Fermiego* wyprowadzoną w **H4**.

Wyniki powyższe dotyczą modelu, w którym delta potencjał nie jest, jak wcześniej, określony przez stałą, lecz ma charakter zmienny, określony przez funkcje $V_\pm$. Wyniki formułują *warunki na stabilność widma istotnego:* **H4a***,* **H4c***, istnienie izolowanych wartości własnych:* **H4b***, istnienie zanurzonych wartości własnych przy zachowaniu symetrii układu:* **H4b** *oraz rezonansów, których własności spektralne są wyrażone przy pomocy parametrów łamiących symetrię:* **H4d**.

Praca **H5** stanowi kolejny z cyklu artykułów należących to linii asymptotyk rezonansowych. Rozważano w niej zjawisko rezonansów wywołanych przez złamaną symetrię w trójwymiarowym modelu kwantowym z silnie singularnym potencjałem typu delta. Potencjał zlokalizowany jest na dwóch rozłącznych krzywych w $\mathbb{R}^3$: okręgu $C_R := (0, R\cos\phi, R\sin\phi)$, $R > 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$ oraz prostej $\Sigma_\varepsilon := \{(x_1, \varepsilon(1-\varepsilon^2)^{-1/2}, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\,, \varepsilon > 0\}$; ε określa sin kąta jaki tworzy Σ_ε z prostą $\Sigma_0 := \{\{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$. Przedmiotem zainteresowania był hamiltonian $H_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ działający w $L^2(\mathbb{R}^3)$ i odpowiadający wyrażeniu:

$$-\Delta + \delta_\alpha(x - C_R) + \delta_\beta(x - \Sigma_\varepsilon)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{27}$$

Jako krok pomocniczy rozważano osobno dwa układy, w których potencjały skoncetrowane były na C_R oraz Σ_ε, tj. odpowiadające hamiltonianom H_{α,C_R} i $H_{\beta,\Sigma_\varepsilon}$. Główne wyniki pracy **H5** podsumować można następująco:

$\star$ **H5a** *Własności spektralne H_{α,C_R} oraz $H_{\beta,\Sigma_\varepsilon}$.* Dla dowolnej liczby całkowitej k isnieje para $\alpha_k\,, R_k$ taka, że dla każdego $\alpha < \alpha_k$ oraz $R > R_k$ operator H_{α,C_R} posiada $2|k| + 1$ wartości własnych $\{\epsilon_n\}_{n=-k}^k$. W pracy **H5** zostało wyprowadzone równanie określające relację pomiędzy α_k oraz R_k. Liczba wartości własnych jest zliczana wraz z krotnością, ponieważ $\epsilon_n = \epsilon_{-n}$. Oznaczmy przez $\omega_n(\cdot)$ odpowiednie wektory własne. Dla analizy zjawiska zanurzonych wartości własnych oraz rezonansów kluczowy jest fakt, że dla każdego $n \neq 0$ zachodzi

$$\omega_n(x) = 0\,, \quad \text{jeśli} \quad x \in \Sigma_0\,.$$

Ponadto, widmo istotne operatora H_{α,C_R} jest następujące $[0,\infty)$. [9]

Z drugiej strony operator $H_{\beta,\Sigma_\varepsilon}$ posiada jedynie widmo istotne: $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\beta,\Sigma_\varepsilon}) = [\xi_\beta,\infty)$.

$\star$ **H5b** *Zanurzone wartości własne.* Załóżmy, że C_R jest położony w płaszczyźnie prostopadłej to linii prostej Σ a $\alpha < \alpha_k$ i $R > R_k$ są zdefiniowane jak w wyniku **H5a**. Wtedy $\{\epsilon_n\}_{n=-k}^{k}$ stanowią wartości własne operatora H_α jak również $H_{\alpha,\beta,0}$ (poza ϵ_0). Ponadto, wszystkie liczby $\epsilon_n \geq \xi_\beta$ określają zanurzone wartości własne hamiltonianu $H_{\alpha,\beta,0}$.

$\star$ **H5c** *Rezonanse.* Załóżmy, że $\alpha < \alpha_k$, $R > R_k$ oraz $\epsilon_n \geq \xi_\beta$, gdzie $|n| \leq |k|$, $n \neq 0$; ostatni warunek oznacza, że ϵ_n stanowią zanurzone wartości własne. Wtedy, dla każdego $n \neq 0$ takiego, że $\epsilon_n \geq \xi_\beta$ gdy $|n| \leq |k|$ rezolwenta operatora $H_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ dopuszcza przedłużenie analityczne na drugi płat Riemanna w otoczeniu ϵ_n oraz biegun w punkcie $z_{\varepsilon,n} = \mu_{\epsilon,n} + i\nu_{\varepsilon,k}$, który posiada następującą asymptotykę

$$\mu_{\varepsilon,n} = \epsilon_n + \mathcal{O}(\varepsilon^{2|n|})\,, \quad \nu_{\varepsilon,n} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2|n|})\,, \quad \nu_{\varepsilon,n} < 0\,.$$

Powyższe wyniki wykazują *zjawisko wartości własnych i rezonansów w przypadku, gdy delta potencjał jest zlokalizowany na dwóch rozłącznych komponentach, z których obie prowadzą do silnie singularnego oddziaływania.* W modelu tym ujawnia się nieskończona liczba zanurzonych wartości własnych, gdy układ zachowuje symetrię. *Po złamaniu symetrii pojawiają się rezonanse, których szerokość zachowuje się jak $\mathcal{O}(\varepsilon^{2|n|})$, gdzie ε jest parametrem łamania symetrii, natomiast n zlicza wartości własne.* Fakt, że zaburzenie ma w powyższym modelu charakter silnie singularny wywołało konieczność istotnego rozwinięcia nowych technik związanych z konstrukcją przedłużenia analitycznego rezolwenty.

Praca **H1** stanowi ostatni z cyklu artykułów należących to linii asymptotyk rezonansowych. Rozważano w niej trójwymiarową warstwę Ω ograniczoną dwoma równoległymi ścianami, tj. $\Omega := \{(\underline{x}, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times [0,\pi]\}$. W układzie tym wprowadzany delta potencjał skoncetrowany na jedwymiarowym prostym odcinku I, prostopadłym do ścian, tj. $I := \{(0,0,x_3)\,, x_3 \in [0,\pi]\}$. Hamiltonian układu oznaczymy przez $H_{\alpha,I}$. Jego widmo istotne jest stabilne względem zaburzenia na zbiorze zwartym I i ma postać:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\alpha,I}) = [1,\infty)\,.$$

Główne wyniki pracy **H1** podsumować można następująco:

[9] Należy nadmienić, że analogiczny problem, choć nieco inną renormalizacją, dykutowany był w in [8].

⋆ **H1a** *Dyskretne wartości własne pod progiem widma istotnego oraz zanurzone wartości własne.* Operator $H_{\alpha,I}$ posiada nieskończoną liczbę wartości własnych:

$$\epsilon_n = \xi_\alpha + n^2 \,, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N} \,,$$

z których skończona ilość - przynajmniej jedna - definiuje izolowane spektrum (poniżej progu widma istotnego 1), natomiast pozostałe tworzą zanurzone wartości własne.

Podobnie jak w poprzednim modelu, istnienie zanurzonych wartości własnych jest konsekwencją symetrii w analizowanym układzie. Wprowadzenie dodatkowego delta potencjału - „zaburzacza" do układu może spowodować złamanie symetrii a w konsekwencji przesunięcie się bieguna rezowenty na drugi płat Riemanna. Rolę „zaburzacza" w rozważanym modelu pełni delta potencjał z nośnikiem na powierzchni. Model ten realizuje więc kombinację słabo i silnie singularnego potencjału.

⋆ **H1b** *Rezonanse.* Niech $\Sigma \subset \Omega \setminus I$ oznacza powierzchnię klasy C^2 o polu $|\Sigma|$. Do układu wprowadzamy delta oddziaływanie na Σ scharakteryzowane przez stałą oddziaływania β. Niech $H_{I,\Sigma}$ oznacza hamiltonian układu z zaburzeniem na I i Σ. Załóżmy, że $\epsilon_l > -\frac{\alpha^2}{4}$, $\epsilon_l \neq k^2$. Wtedy rezolwenta operatora $H_{I,\Sigma}$ posiada przedłużenie na drugi płat Riemanna oraz biegun w punkcie

$$z_l(\delta) = \epsilon_l + \mu_l(|\Sigma|) \,,$$

gdzie $\Im\mu_l(|\Sigma|) = \mathcal{O}(|\Sigma|^2)$. W artykule **H1** wyrażono $\mu_l(|\Sigma|)$ przy pomocy niezaburzonych wektorów własnych.

Powyższe wyniki opisują *zjawisko zanurzonych wartości własnych i rezonansów w warstwie kwantowej, w której współistnieją potencjały słabo i silnie singularne.* Wyniki pokazują, że szerokość rezonansu zachowuje się jak $\mathcal{O}(|\Sigma|^2)$ dla małej „powierzchni zaburzającej".

Asymptotyki spektralne wywoływane deformacją geometryczną: H2, H6, H7, H8.

Artykuł **H2** otwiera ostatnią linię badań w zakresie asymptotyk spektralnych. Dedykowany on został analizie modeli ze słabo singularnymi potencjałami, których nośnik jest hyperpowierzchnią w $\mathbb{R}^n$. Celem pracy jest analiza spektralna układów, w których *hyperpowierzchnie zbliżają się do siebie.*

Rozważmy gładką powierzchnię zamkniętą $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Za pomocą wektora normalnego $n : \Sigma_0 \to \mathbb{R}^d$ definiujemy dwie równoległe hyperpowierzchnie $\Sigma_{\pm\varepsilon}$ w następujący sposób:

$$\Sigma_{\pm\varepsilon} := \{q \pm \varepsilon n(q) \,:\, q \in \Sigma_0\} \,.$$

Hamiltonian H_ε analizowany w pracy **H2** odpowiada uogólnieniu (7), a dokładniej formalnemu wyrażeniu

$$H_\varepsilon := -\Delta + \alpha_+\delta(x - \Sigma_{+\varepsilon}) + \alpha_-\delta(x - \Sigma_{-\varepsilon}) \,,$$

gdzie $\alpha_\pm \in \mathbb{C}$. Hamiltonian H_ε *nie jest więc, w ogólności operatorem samosprzężonym.*
W rozważanym modelu nośnik delta potencjałów jest zwarty. Dzięki temu można pokazać, że widmo istotne H_ε jest stabilne względem układu „swobodnego”, tzn.

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\varepsilon) = [0, \infty)\,, \quad \varepsilon \geq 0\,.$$

Analizowana była asymptotyka spektralna dla $\varepsilon \to 0$. Wydaje się naturalne, że *zerowy człon zaburzenia powinien ujawnić własności operatora H_0 odpowiadającego:*

$$-\Delta + (\alpha_+ + \alpha_-)\delta(x - \Sigma_0)\,.$$

Zachodzi jednak pytanie: jaka jest zależność widma dyskretnego od $\varepsilon \neq 0$. Najważniejsze wyniki otrzymane w pracy **H2** scharakteryzować można następująco:

$\star$ **H2a** *Zbieżność normy rezolwenty.* Dla dowolnego $z \in \rho(H_0)$ istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla każdego $\varepsilon < \varepsilon_0$ mamy $z \in \rho(H_\varepsilon)$ oraz zachodzi zbieżność w sensie normy rezolwenty:

$$\left\|(H_\varepsilon - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \qquad \text{gdy} \qquad \varepsilon \to 0\,.$$

$\star$ **H2b** *Asymptotyka spektrum dyskretnego.* Niech λ_0 oznacza dyskretną wartość własną (o krotności 1) operatora H_0 odpowiadającą funkcji własnej ψ_0. Istnieje stała $\varepsilon_0 > 0$ oraz r taka, że dla każdego $\varepsilon < \varepsilon_0$, H_ε posiada dokładnie jedną wartość własną w kuli $B_r(\lambda_0)$ o promieniu r i środku w λ_0. Ponadto zachodzi następująca asymptotyka:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \lambda_0'\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad \text{gdy} \qquad \varepsilon \to 0\,, \tag{28}$$

gdzie

$$\lambda_0' := \frac{\alpha_+ \int_{\Sigma_0} \partial_n^+ \psi_0^2 + \alpha_- \int_{\Sigma_0} \partial_n^- \psi_0^2 - \int_{\Sigma_0} \left[\alpha_+^2 + \alpha_-^2 + (\alpha_+ - \alpha_-)\,(d-1)K_1\right] \psi_0^2}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi_0^2}\,, \tag{29}$$

oraz K_1 oznacza pierwszą średnią krzywiznę Σ_0 natomiast

$$\partial_n^\pm f(x) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(x \pm n\epsilon) - f(x)}{\epsilon}\,.$$

Formuła (29) wykazuje, że *w pierwszy rząd zaburzeń swój wkład mają wartości pochodnych normalnych na Σ_0.* Ich pojawienie się jest naturalne, ponieważ skok pochodnej normalnej odpowiedzialny jest za delta potencjał hamiltonianu H_0. *Wyrazy z faktorami $\alpha_\pm$ są konsekwencją singularnego charakteru potencjału.* Nie pozwala on na zastosowanie standardowych metod analitycznej teorii zaburzeń do znalezienia rozwinięcia wartości własnych. Ostatni człon w formule (29) posiadający faktor $(d-1)K_1$ pokazuje, że *gdy hiperpowierzchnie zbliżają się do siebie już pierwszy* *człon rachunku zaburzeń „odczuwa” lokalne własności geometryczne* Σ_0 scharakteryzowane przez pierwszą średnią krzywiznę.

W pracy **H2** wyprowadzono również formułę na asymptotyczną postać wartości własnych, gdy λ_0 ma krotność większą niż 1.

Artykuł **H6** stanowi kolejną publikację należącą do tematyki: asymptotyki spekralne wywołane szczególną deformacją geometryczną. Rozważana w nim była klasa silnie singularnych potencjałów. System niezaburzony zdefiniowany był przez hamiltonian działający w $L^2(\mathbb{R}^3)$ i posiadający potencjał skupiony na krzywej $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ klasy C^1 (zamkniętej lub otwartej) o długości $L < \infty$. Hamiltonian ten odpowiada wyrażeniu (14) i oznaczać go będziemy dalej $H_{\Gamma,\alpha}$.

Przed sformułowaniem głównego problemu pracy **H6** należy wspomnieć o wstępnym wyniku:

$\star$ **H6a** *Warunki zapewniające istnienie spektrum dyskretnego.* Jeśli $L > 2\pi \mathrm{e}^{2\pi\alpha-\psi(1)}$, wtedy operator $H_{\alpha,\Gamma}$ posiada przynajmniej jeden stan związany.

Głównym celem pracy była analiza asymptotyki dla modelu, gdy Γ dopuszcza szczelinę o długości 2ε. Aby zagadnienie opisać dokładniej wprowadźmy paramatryzację krzywej Γ za pomocą długości łuku $[0,L] \ni s \mapsto \mathbb{R}^3$. Niech Γ_ε *oznacza krzywą zawartą w* Γ *posiadającą szczelinę symetryczną względem* $\Gamma(s_0)$, *gdzie* $s_0 \in (0,L)$, tzn. Γ_ε jest fragmentem Γ, (jeśli Γ nie jest zamknięta to Γ_ε składa się z dwóch rozłącznych komponent) który można sparametryzować $(0, s_0-\varepsilon)\cup(s_0+\varepsilon, L)$. Odpowiedni hamiltonian z potencjałem skoncetrowanym na Γ_ε oznaczamy $H_{\alpha,\Gamma_\varepsilon}$.

$\star$ **H6b** *Asymptotyka spektrum dyskretnego operatora hamiltonianu* $H_{\alpha,\Gamma_\varepsilon}$ *ze szczeliną.* Niech λ_L oznacza niezdegenerowaną dyskretną wartość własną operatora $H_{\alpha,\Gamma}$. Dla ε dostatecznie małego operator $H_{\alpha,\Gamma_\varepsilon}$ posiada dyskretną wartość, która ma następującą asymptotykę:

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_L - \omega(\kappa_L)|\phi(s_0)|^2 \varepsilon \ln \varepsilon + o(\varepsilon \ln \varepsilon)\,, \tag{30}$$

gdzie

$$\omega(\lambda_L) = 16\kappa_L \left(\int_{[0,L]^2} \mathrm{e}^{-\kappa_L|\gamma(s)-\gamma(s')|} \phi(s)\overline{\phi(s')} \mathrm{d}s\mathrm{d}s' \right)^{-1}, \kappa_L := \sqrt{-\lambda_L}\,,$$

natomiast ϕ oznacza funkcję spełniającą warunek Birmana-Schwingera (18); mamy $\omega(\lambda_L) > 0$.

Wyniki powyższe pokazują, że *dopuszczenie szczeliny o długości* 2ε *w nośniku silnie singularnego delta potencjału powoduje zaburzenie spektrum dykretnego, którego poprawka zachowuje się jak* $\varepsilon \ln \varepsilon$. Udział logarytmicznego członu w poprawce jest konsekwencją faktu, że funkcje z dziedziny $H_{\alpha,\Gamma}$ posiadają logarytmiczną osobliwość. Pierwszy człon zaburzeń został wyrażony przy pomocy „niezaburzonych” funkcji będących rowiązaniem równania Birmana–Schwingera.

Formuła (30) pokazuje również, że *mała szczelina* Γ *indukuje „pchnięcie wartości własnych do góry", ponieważ* $\omega(\kappa_L) > 0$.

W kolejnej pracy **H7** badano dwuwymiarowy układ kwantowy z delta potencjałem na $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, gdzie Γ jest krzywą klasy C^2 o skończonej długości lub ogólniej składa się ze skończonej ilości rozłącznych krzywych płaskich o skończonej długości. Zdefiniujmy $R := \inf\{r > 0 \,:\, \Gamma \subset B(r)\}$, gdzie $B(r) \subset \mathbb{R}^2$ oznacza kulę o promieniu r. Hamiltonian $H_{\alpha,\Gamma}$ takiego układu odpowiada wyrażeniu (7) dla $d = 2$. Operator $H_{\alpha,\Gamma}$ posiada przynajmniej jeden stan związany a liczba stanów związanych jest funkcją rosnącą parametru $\alpha > 0$.
Wyniki zawarte w pracy **H7** dotyczą oszacowania najniższej przerwy energetycznej, czyli $E_1 - E_0$, gdzie $E_i < 0$, $i = 0, 1$ oznaczają odpowiednio energię stanu podstawowego i energię pierwszego wzbudzonego stanu. W dalszej analizie będziemy używać również oznaczeń $\kappa_i := \sqrt{-E_i}$. Główny wynik zawarty w pracy **H7** stanowi oszacowanie na granicę dolną $E_1 - E_0$.

$\star$ **H7a** *Ograniczenie dolne na najniższą przerwę energetyczną.* Zachodzi następująca nierówność:

$$E_1 - E_0 \geq \kappa_1^2 \mu_{\Gamma,\alpha}(\rho, \kappa_0) \exp\left(-C_0 \rho\right) \,, \qquad \rho := \kappa_0 R \,, \tag{31}$$

gdzie $\mu_{\Gamma,\alpha}$ jest funkcją wielomianową.

Puktem wyjścia do dowodu (31) jest równość, por. Corollary 3.2, **H7**:

$$E_1 - E_0 = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla \frac{\psi_1}{\psi_0} \right|^2 \psi_0^2 \mathrm{d}x / \|\psi_1\|^2 \,; \tag{32}$$

ψ_i oznaczają odpowiednio wektory własne odpowiadające E_i (przy czym można pokazać, że $\psi_0 > 0$). Praca **H7** zawiera szereg pomocniczych oszacowań na ψ_i oraz $\nabla \psi_i$, które zostały zastosowane do (32). Są one narzędziami do dowodu ostatecznego twierdzenia a, z drugiej strony, stanowią osobne, interesujące same w sobie, wyniki ustanawiające zachowania wektorów własnych hamiltonianów z delta potencjałem. Nierówność (31) została otrzymana przez uogólnienie metody rozwiniętej dla operatorów Schrödingera z regularnymi potencjałami, por. [42, 45, 46]. Na przykład, gdy hamiltonian układu w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ ma postać $-\Delta + V$, gdzie V jest funkcją gładką o nośniku na odcinku $[a, b]$ wtedy

$$E_n - E_{n-1} \geq \pi \lambda^2 \exp^{-\lambda(b-a)} \,, \quad n \in \mathbb{N} \,,$$

gdzie

$$\lambda = \max_{E \in (E_n, E_{n-1}),\, x \in (a,b)} |E - V(x)|^{1/2} \,.$$

Wynik (31) wydaje się być szczególnie interesujący w sytuacji, gdy układ składa się z dwóch dokładnie takich samych krzywych o ustalonych długościach oraz, gdy $R \to \infty$. Układ ma wtedy tendencję do separacji na dwa bliźniacze układy z pojedynczą krzywą. Sugeruje to, że przerwa energetyczna $E_1 - E_0$ dąży do 0 w asymptotyce $R \to \infty$. *Z drugiej strony, formuła (31) pokazuje, że przerwa ta, jest jednak ograniczona z dołu przez funkcję wykładniczą, której zachowanie jest konsekwencją asymptotycznie wykładniczego zaniku odpowiednich funkcji własnych i ich gradientów.*

W ostatniej z omawianych prac **H8** podjęto zagadnienie rozproszeń na potencjałach typu delta. Rozważano dwuwymiarowy układ kwantowy z oddziaływaniem zlokalizowanym na krzywej $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, która zdefiniowana jest jako lokalnie zdeformowana prosta Σ. Dokładniej, istnieje zbiór zwarty $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ taki, że $\Gamma \setminus \mathcal{M} \subset \Sigma$ oraz $\Gamma \cap M$ składa się ze skończonej ilości rozłącznych krzywych o skończonych długościach. Hamiltonian układu oznaczamy standardowo $H_{\alpha,\Gamma}$. Fakt, że Γ jest nieskończoną krzywą, która asymptotycznie zbiega z prostą ma konsekwecje dla spektrum istotnego, które przyjmuje postać:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\alpha,\Gamma}) = \left[-\frac{\alpha^2}{4}, \infty\right) .$$

W pracy **H8** rozważano problem rozproszeń dla ujemnej części spektrum, czyli $[-\frac{\alpha^2}{4}, 0)$; analizowano więc niskoenergetyczną asymptotykę spektrum. Aby scharakteryzować główne wyniki pracy wprowadźmy oznaczenia: $R_{\alpha,\Gamma}(z)$, $R_{\alpha,\Sigma}(z)$ na rezolwenty operatorów, odpowiednio $H_{\alpha,\Gamma}$ i $H_{\alpha,\Sigma}$. Najważniejsze wyniki zawarte w **H8** scharakteryzować można następująco:

⋆ **H8a** *Istnienie i zupełność operatorów falowych.* $R_{\alpha,\Gamma}(z) - R_{\alpha,\Sigma}(z)$ jest operatorem klasy śladowej, co na podstawie twierdzenia Kurody–Birmana, implikuje, że dla pary operatorów $(H_{\alpha,\Gamma},\, H_{\alpha,\Sigma})$ operatory falowe istnieją i są zupełne.

⋆ **H8b** *Uogólnione funkcje własne i rekonstrukcja $S-$ macierzy.* Uogólnione funkcje własne $H_{\alpha,\Gamma}$ mają postać

$$\psi_\lambda(x) \approx \begin{cases} \mathcal{T}(\lambda) \mathrm{e}^{ik_\alpha(\lambda)x_1} \mathrm{e}^{-\alpha|x_2|/2} & \text{dla} \quad x_1 \to -\infty \\ \mathrm{e}^{ik_\alpha(\lambda)x_1} \mathrm{e}^{-\alpha|x_2|/2} + \mathcal{R}(\lambda) \mathrm{e}^{-ik_\alpha(\lambda)x_1} \mathrm{e}^{-\alpha|x_2|/2} & \text{dla} \quad x_1 \to +\infty\,, \end{cases}$$

gdzie $k_\alpha(\lambda) := (\lambda + \alpha^2/4)^{1/2}$ natomiast $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ są współczynnikami przejścia i odbicia, które zostały w pracy **H8** wyprowadzone.

W niskoenergetycznej asymptotyce spektrum w rozważanym układzie rozpraszanie ma więc charakter jednowymiarowy. Współczynniki $\mathcal{T}$ i $\mathcal{R}$ są zdeterminowane przez odpowiednie „zanurzenia” uogólnionych wektorów własnych $\mathrm{e}^{ik_\alpha(\lambda)x_1}\mathrm{e}^{-\alpha|x_2|/2}$ do $L^2(\Gamma)$. Ze względu, na singularny charakter potencjału zastosowanie znanych, ogólnych twierdzeń z zakresu teorii rozproszeń, jak na przykład twierdzenia Kurody–Birmana wymagało wypracowania osobnych wyników. Szczególnie cenną stroną powyższej pracy jest fakt, że rozwinięto w niej metody analizy zagadnienia rozproszeń na potencjałach singularnych o nośniku niezwartym. Należy podkreślić, że literatura w tym obszarze nie jest bogata i dotyczy delta potencjałów skupionych na zbiorach zwartych, por. [3, 11].

4c4. Uwagi końcowe.

Badania prowadzone w pracach **H1-H11** dotyczyły własności spektralnych hamiltonianów z potencjałami zlokalizowanymi na niżej wymiarowych zbiorach. Ich celem była analiza asymptotyk spektralnych dla wybranej klasy modeli prowadząca do odsłonięcia relacji pomiędzy własnościami spektralnymi układu a jego geometrią. Podejmowane cele dotyczyły między innymi następujących problemów:

- Stabilność widma istotnego.
- Charakteryzacja widma dyskretnego za pomocą własności geometrycznych układu.
- Analiza zjawiska rezonansów w kontekście geometrii układu.
- Opis zjawiska rozproszeń.

Szerszy kontekst badań: nie tylko delta potencjały. Wyniki opisanych powyżej badań sformułowane zostały w języku delta potencjałów. Jednak podkreślić należy ich szerszy kontekst, który wynika możliwości przybliżenia delty Diraca przez potencjały regularne. Rozważmy klasę modeli, która dyskutowana była w pracy **H11**. Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ oznacza powierzchnię zdefiniowaną w opisie wyników **H11** a Ω_d „warstwowe sąsiedztwo" Γ, gdzie $2d > 0$ jest grubością warstwy Ω_d; parametr $u \in (-d, d)$ jest związany z krzywoliniowym układem współrzędnych w Ω_d i odpowiada współrzędnej normalnej. Za pomocą funkcji $W \in L^\infty(-1, 1)$ zdefiniujmy rodzinę potencjałów:

$$V_d(x) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in \Omega_d \\ -\frac{1}{d} W(\frac{u}{d}) & \text{if} \quad x \in \Omega_d \,. \end{cases}$$

Rozważmy jednoparametrową rodzinę operatorów z regularnymi potencjałami:

$$H_d := -\Delta + V_d \,:\, D(\Delta) \to L^2(\mathbb{R}^3)\,.$$

W pracy **H11**, por.[19], pokazano twierdzenie: dla $d \to 0$ zachodzi następująca zbieżność

$$H_d \to H_{\alpha,\Gamma}\,, \ \text{gdzie} \ \alpha = \int_{-1}^{1} W(t)\mathrm{d}t$$

w sensie normy rezolwenty. Analogiczna zbieżność dla ogólniejszej klasy potencjałów pokazana została w [9]. Twierdzenie to w połączeniu z dyskutowanymi powyżej wynikami dla $H_{\alpha,\Gamma}$ niesie konsekwencje dla spektrum hamiltonianów H_d z regularnymi potencjałami, por. [61]. Na przykład, jeśli $\lambda \in \sigma(H_{\alpha,\Gamma})$ to istnieje $\lambda(d) \in \sigma(H_d)$ takie, że $\lambda(d) \to \lambda$ dla $d \to 0$[10] oraz jeśli $\lambda \in \sigma(H_d)$ dla każdego d dostatecznie małego to $\lambda \in \sigma(H_{\alpha,\Gamma})$. Dlatego też wyniki otrzymane w omawianych badaniach mają odpowiednie implikacje spektralne dla hamiltonianów z regularnymi potencjałami.

Szerszy kontekst badań: zaburzenia przez miary klasy Kato. Innym przykładem o znacznie szerszym kontekście niż delta potencjały jest praca **H3**, w której zaburzenie zdefiniowane przez miarę Radona należącą do uogólnionej klasy Kato. Delta

[10]Zbieżność ta jest konsekwencją zbieżności rezolwenty w silnym sensie.

potencjały tworzą szczególną podgrupę, która spełnia warunek klasy Kato. W rzeczywistości jednak wynik otrzymano dla bardzo ogólnej klasy potencjałów, w której mieszczą się także potencjały regularne oraz dopuszczające różne typy osobliwości.

Szerszy kontekst badań: operatory niesamosprzężone. Kolejnym przykładem otwierającym szersze ujęcie opisywanych badań jest praca **H2**. Autorzy motywowani rosnącym zainteresowaniem operatorami niesamosprzężonymi w ostatnich latach, por. [55], rozważali hamiltoniany z potencjałami zespolonymi, a w konsekwencji defniującymi operatory niesamosprzężone. Operatory takie są w mechanice kwantowej związane z tzw. układami otwartymi.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

5a. Omówienie wybranych osiągnięć naukowo-badawczych przed i po doktoracie.

Dotychczasowe moje badania koncetrowały się głównie wokół zagadnień hamiltonianów z krótkozasięgowymi potencjałami.

Oprócz opisanej wcześniej asymptotyki spektralnej otrzymane wyniki dotyczą wpływu pola magnetycznego na spektrum singularnie zaburzonych hamiltonianów, analizy dynamiki, operatorów ułamkowych, a także, co wychodzi poza obszar potencjałów krótkozasięgowych, falowodów kwantowych.

Badania prowadzone przed doktoratem dotyczyły modeli kwantowych z delta potencjałami *zdefiniowanymi przez dynamikę.* Hamiltonian takiego układu opisany przez wyrażenie

$$H = -\Delta + A\delta(x - \Gamma)\,, \tag{33}$$

gdzie A jest operatorem działającym w $L^2(\Gamma)$. Prace dotyczyły badań nad znalezieniem poprawnej matematycznie definicji operatora samosprzężonego odpowiadającego (33) oraz wypracowaniu metod analizy spektralnej. Opierały się na teorii rozszerzeń samosprzężonych operatorów symetrycznych przy zastosowaniu tzw. skali przestrzeni Hilberta, prowadząc znalezienia odpowiedniego operatora stanowiącego samosprzężoną realizację wyrażenia (33).

Dla szczególnej klasy modeli uzyskano dokładniejsze wyniki spektralne dotyczące zależności spektrum dyskretnego od operatorów zaburzających $A : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$.

Okres po doktoracie otworzyłam rocznym stażem podoktorskim w Czech Academy of Science, w którym rozpoczęłam długoletnią, trwającą do dzisiaj, współpracę z prof. Exnerem. Jako pierwsza powstała publikacja [24], która stanowi o pojawieniu stanów związanych pod wpływem deformacji w układach z silnie singularnymi delta potencjałami. Wynik ten, choć nie był bezpośrednio związany z badaniem asymptotyki spektralnej, to jednak otworzył szereg pytań dotyczących tego zagadnienia. Jego konsekwencją był cykl najwcześniejszych prac **H6** i **H8-H11** wchodzących w skład opisywanego osiągnięcia naukowego, napisanych we współpracy z prof. Exnerem. W międzyczasie otworzyłam współpracę z prof. I. Veselić'em, która częściowo dotyczyła zagadnień operatorów Schrödingera z delta potencjałami. W jej efekcie powstała między innymi publikacja **H7**.

W latach 2007-2012 moja aktywność naukowa spadła z powodów poza zawodowych. Poświęciłam wtedy więcej czasu na zajęcia dydaktyczne, w tym zajęcia popularyzujące naukę wśród uczniów szkół podstawowych. Zajęłam się również wdrażaniem i realizacją programu Erasmus na Wydziale Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Zielonogórskiego. Efektem tego jest silna i stabilna współpraca międzynarodowa w ramach programów Erasmus+ KA103 i KA107 z takimi krajami jak na przykład: Grecja, Hiszpania, Wietnam, Gruzja, Ukraina.

W roku 2013 otworzyłam współpracę z prof. D. Krejčiříkiem oraz dr V. Lotoreichikiem. Jej efektem są publikacje włączone w opisywane tu osiągnięcie naukowe **H2-H4** oraz [28].

Wybrane zagadnienia badawcze.

Badanie wpływu pola magnetycznego w wybranych modelach z potencjałami singularnymi. W jednej z ostatnich prac [25] zbadany był wpływ pola magnetycznego na spektrum hamiltonianu, którego potencjał skupiony jest na koncetrycznych, periodycznych okręgach. Pole magnetyczne miało charakter strumienia Aharonowa–Bohma zlokalizowanego w centrum układu. Wykazane zostało, że poniżej pewnej krytycznej wartości strumienia magnetycznego, spektrum hamiltonianu akumuluje się w progu widma istotnego, natomiast powyżej krytycznej wartości pola magnetycznego spektrum dyskretne składa się z co najwyżej skończonej ilości punktów. Z kolei dla dostatecznie silnego pola magnetycznego widmo dyskretne całkowicie zanika, por. [25]. Wynik ten otwiera szereg nowych, intrygujących problemów. Jednym z ważniejszych jest pytanie: czy powyżej krytycznej wartości pola magnetycznego widmo dyskretne jest niepuste. O dalszych problemach otwartych wspominam w części 5c.

Badanie ewolucji układu, dynamika Zeno. Układy z delta potencjałami były również badane pod kątem dynamiki. W pracy [20], wspólnej z prof. Exnerem i Ichinose porównywane były ewolucje dwóch układów. Pierwszy z nich reprezentował „dynamikę stabilną”, izolowaną od oddziaływania z otoczeniem. Drugi natomiast, dopuszczał oddziaływanie z otoczeniem i jednocześnie poddawany był monitoringowi typu Zeno. Porównanie obu dynamik wykazało, że nie różnią się one od siebie istotnie w czasach małych w skali czasu życia (lifetime) cząstki w układzie z dynamiką stabilną.

Operatory ułamkowe. Osobny nurt stanowią badania, w których analizowane były ułamkowe operatory Schrödingera z potencjałami zdefiniowanymi za pomocą miar, w szczególności delta potencjałów. W pracy [51] wykazano, że odpowiedni operator ułamkowy z delta potencjałem jest samosprzężony oraz przeprowadzono analizę asymptotyk spektralnych dla szczególnej klasy potencjałów singularnych. Zadanie to wymagało rozwinięcia nowych technik, które można było zaadoptować na grunt operatorów ułamkowych.

Delta potencjał o zmiennym charakterze. Na osobną uwagę zasługują także wyniki prac [49] i [47]. W pierwszej z nich rozważano dwuwymiarowy układ kwantowy z zaburzeniem singularnym na krzywej Γ i scharakteryzowany przez potencjał

Morse'a. Pokazano między innymi, że deformacja Γ powoduje przesunięcie energii stanu podstawowego w „kierunku ujemnym". Osobne wyniki otrzymano dla oszacowania liczby stanów związanych. Z kolei w pracy [47] rozważano delta potencjał o zmiennym charakterze na nieskończonej krzywej. Uzyskano asymptotyczne formuły na wartości własne.

Falowody. Oprócz modeli z delta potencjałami badania moje obejmowały także analizę falowodów. W pracy wspólnej z prof Veselić'em, por. [52], rozważane były falowody z mieszanymi warunkami brzegowymi. Badania dotyczyły oszacowania przerw energetycznych między najniższymi wartościami własnymi.

Inne asymptotyki spektralne. Także w innych pracach, nie należących do cyklu **H1-H11**, rozważane były różnego rodzaju asymptotyki spektralne hamiltonianów z potencjałami singularnymi; wymienić tu można na przykład [26, 27, 28, 50]. Wyniki zawarte w publikacjach [27, 28, 50] mają także swe konsekwencje dla określonej klasy potencjałów regularnych wobec dyskutowanego wcześniej przybliżenia delty przez potencjały regularne i odpowiedniej zbieżności w sensie normy rezolwenty.

5b. Plany na przyszłość.

Plany badawcze na przyszłość obejmują między innymi analizę z zakresu *geometrii spektralnej dla regularnych potencjałów.* Na przykład model, w którym potencjał jest zlokalizowany na nieskończonym pasku o dowolnej szerokości, o którym zakładamy, że jest lokalnie wygięty, jest wciąż problemem otwartym. Przeprowadzenie analizy widma dyskretnego (twierdzenie o istnieniu stanów związanych) i rezonansów oraz zagadnienia rozproszeń wymaga prawdopodobnie rozwinięcia nowych metod.
Powyższy model jest jednym z przykładów z listy interesujących problemów otwartych w kontekście geometrii spektralnej dla układów z regularnymi potencjałami.
Z drugiej strony niezwykle interesujące wydaje się uogólnienie wyników otrzymanych w [25] dla regularnych potencjałów, por. 5a *Badanie wpływu pola magnetycznego w wybranych modelach z potencjałami singularnymi.* W tego typu modelach znany jest fakt, że w dwuwymiarowym układzie bez obecności pola magnetycznego próg widma istotnego jest jednocześnie punktem, w którym akumuluje się spektrum dyskretne, por. [64]. Pytanie, czy w obecności pola magnetycznego istnieje stała krytyczna, po której osiągnięciu dochodzi do przejścia spektralnego w wyniku, którego widmo dyskretne z akumulującego całkowicie znika, pozostaje otwarte.

6. Dane biometryczne.

6a. Sumaryczny impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem opublikowania.

Dla artykułów opublikowanych w latach 2017-18 wartość Impact Factor został przyjęty zgodnie z danymi z roku 2016.

- IF = 27. 585

6b. Liczba publikacji, cytowań i współautorów.

- Całkowita liczba publikacji: 29 (recenzowanych 28, samodzielnych 7)
- Liczba publikacji po doktoracie: 27 (recenzowanych 26, samodzielnych 6)

  Baza WoS nie posiada czterech publikacji. Pełny wykaz publikacji wymienionych w załączniku 4 znajduje się w:
  - *http://publikacje.uz.zgora.pl:7777/skep/show.publications_author?wp_jezyk=1&wp_pracownik_id=1020388*
  - *bazie Google Scholar.*
- Liczba współautorów: 10
- Liczba cytowań wg bazy WoS: 173 (cytowania bez autocytowań 117)

6c. Indeks Hirscha.

- Indeks Hirscha wg bazy WoS: 8

  Indeksy Hirscha wg bazy Scopus i Google Schoolar wynoszą również 8.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, 1975.

[2] S. Albeverio, R. Bozhok, V. Koshmanenko, The rigged Hilbert space approach in singular perturbation theory, *Rep. Math. Phys.* **58** no. 2 (2006).

[3] S. Albeverio, J. F. Brasche, V. Koshmanenko, Lippmann-Schwinger equation in the singular perturbation theory, *Methods of Functional Analysis and Topology* **3** (01), 1-27 (1997).

[4] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, 2nd printing (with Appendix by P. Exner), AMS, Providence, R.I., 2004.

[5] S. Albeverio, W. Karwowski, V. Koshmanenko, Square powers of singularly perturbed operators *Math. Nachr.* **173** no.1, 5–24 (1995).

[6] S. Albeverio, S. Kuzhel and V. Niznik, Singularly perturbed self-adjoint operators in scales of Hilbert spaces, *Ukrainian Mathematical Journal* **59** no. 6 787—810 (2007).

[7] S. Albeverio, P. Kurasov,*Singular Perturbations of Differential Operators: Solvable Schrödinger-type Operators* 2000.

[8] J. Behrndt, Lotoreichik, Spectral Theory for Schrödinger Operators with δ-Interactions Supported on Curves in $\mathbb{R}^3$, *Ann. H. Poincaré* **18** no. 4, 1305—1347 (2016).

[9] J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann and V. Lotoreichik, Approximation of Schrödinger operators with N-interactions supported on hypersurfaces, *Math. Nachr.* **290** 1–34 (2016).

[10] J.F. Brasche, P. Exner, Yu.A. Kuperin, and P. Šeba, Schrödinger operators with singular interactions, *J. Math. Anal. Appl.* **184** 112–139 (1994).

[11] J.F. Brasche, A. Teta, Spectral analysis and scattering theory for Schrödinger operators with an interaction supported by a regular curve, *Ideas and Methods in Mathematics Analysis* **2** 197–211 (1992).

[12] P. A. Cojuhari, A. Grod and S. Kuzhel, On the S-matrix of Schrödinger operators with non-symmetric zero-range potentials, *J. Math. Phys. A: Math. Theor.* **47** no. 31 (2014)

[13] S. Datta, Electronic transport in mezoscopic systems, Cambrigde University Press, 1995.

[14] J. H. Davis, The physics of low dimensional semiconductors, Cambrigde University Press, 1998.

[15] V. Duchene, N. Raymond, Spectral asymptotics of a broken δ-interaction, *J. Phys. A* **47** (2014).

[16] P. Duclos, P. Exner, Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions, *Rev. Math. Phys.* **7** 73–102 (1995).

[17] T. Ekholm, H. Kovarik, D. Krejcirik, A Hardy inequality in twisted waveguides *Arch. Ration. Mech. Anal.* **188** no. 2, 245–264 (2008).

[18] P. Exner, Leaky quantum graphs: a review, Analysis on Graphs and its Applications, Cambridge, 2007 (P. Exner et al., ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 77, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 523–564.

[19] P. Exner and T. Ichinose, Geometrically induced spectrum in curved leaky wires, *J. Phys. A* **34** 1439–1450, (2001).

[20] P. Exner, T. Ichinose, S. Kondej, On relation between stable and Zeno dynamics in a leaky decay graph model. Operator Theory, Analysis and Mathematical Physics, Book Series: Operator Theory: Advances and Applications **Vol.** 174, (2007).

[21] P.Exner, R. Frank, Absolute continuity of the spectrum for periodically modulated leaky wires in $\mathbb{R}^3$. *Ann. H. Poincare* **8** 241–263 (2007).

[22] P. Exner, R. Gawlista, P. Šeba, M. Tater, Point interaction in a strip, *Ann. Phys.* **252** 133–179 (1996).

[23] P. Exner, H. Kovařík, Quantum Wavequides, New York: Springer, 2015.

[24] P. Exner, S. Kondej, Curvature-induced bound states for a δ interaction supported by a curve in $\mathbb{R}^3$, *Ann. H. Poincaré* **3** 967–981, (2002).

[25] P. Exner, S. Kondej, Aharonov and Bohm versus Welsh eigenvalues *Letters in Mathematical Physics* 1–15. (2018) DOI: 10.1007/s11005-018-1069-9, on-line

[26] P. Exner, S. Kondej, Strong coupling asymptotics for Schrödinger operators with an interaction supported by an open arc in three dimensions, *Rep. Math. Phys.* **77** (2016).

[27] P. Exner, S. Kondej, Gap asymptotics in a weakly bent leaky quantum wire. *Journal of Physics A, Mathematical and General* **46** no. 49, Article Number 495301 (2015).

[28] P. Exner, S. Kondej, V. Lotoreichik, Asymptotics of the bound state induced by N-interaction supported on a weakly deformed plane. *Journal of Mathematical Physics* **Vol. 59** Article number 013051 (2018).

[29] P. Exner, K. Pankrashkin, Strong coupling asymptotics for a singular Schrödinger operator with an interaction supported by an open arc, *Comm. Partial Differential Equations* **39** 193–212, (2014).

[30] P. Exner, K. Nemcová, Magnetic layers with periodic point perturbations, *Rep. Math. Phys.* **52** 255–280 (2003).

[31] P. Exner, K. Nemcová, Quantum mechanics of layers with a finite number of point perturbation, *J. Math. Phys.* **43** 1152—84 (2002).

[32] P. Exner, K. Nemcová, Bound states in point-interaction star graphs, *J. Phys. A.* **34** no. 38, 1152–84 (2001).

[33] P. Exner, K. Nemcová, Leaky quantum graphs: approximations by point interaction Hamiltonian, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 10173–10193 (2003).

[34] P. Exner, K. Yoshitomi, Asymptotics of eigenvalues of the Schrödinger operator with a strong delta-interaction on a loop, *J. Geom. Phys.* **41** 344–358, (2002).

[35] P. Exner, K. Yoshitomi, Persistent currents for $2D$ Schrödinger operator with a strong δ-interaction on a loop, *J. Phys. A* **35** , 3479–3487 (2002).
[36] P. Exner, K. Yoshitomi, Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with $\delta-$interaction on a punctured surface, *Lett. Math. Phys.* **65** 19-26 (2003) (erratum 67 81-82 (2004)).
[37] D. K. Ferry, S. M Goodnick, J. Bird, Transport in Nanostructures, Cambridge University Press, 2009.
[38] P. Freitas, D. Krejčiřík, Waveguides with combined Dirichlet and Robin boundary conditions, *Math. Phys. Anal. Geom.* **9** no. 4, 335–352 (2006).
[39] T. Fülöp, I. Tsutsui, A free particle on a circle with point interaction, *Phys. Lett. A* **264** 366–374 (2007).
[40] V. Geyler, The two dimensional Schrödinger operator with the homogenous magnetic field and its perturbations by periodic zero range potentials, *St. Petersburg Math. J.* **3** 489–532 (1992).
[41] A. Grod, S. Kuzhel, Schrödinger operator with non-symmetric zero-range potentials, *Meth. Funct. Anal. Topol.* **20** no. 1 34—49 (2014).
[42] E. M. Harrel, Double wells, *Commun. Math. Phys.* **75** 239–261 (1980).
[43] N. Hurt, Mathematical Physics of Quantum wires and devices, 2000.
[44] T. Kato, Pertubation theory for linear operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1980.
[45] W. Kirsch, B. Simon, Universal lower bounds of eigenvalue splitting for one dimensional Schrödinger operators, *Commun. Math. Phys.* **97** 453–460 (1985).
[46] W. Kirsch, B. Simon, Comparison theorem for the gap of Schrödinger operators, *J. Func. Anal.* **75** 396–410 (1987).
[47] S. Kondej Schrödinger operator with a strong varying interaction on a curve in $\mathbb{R}^2$. *Journal of Mathematical Physics* **Vol. 54** no. 9, Article Number 093511 (2013).
[48] S. Kondej, J. Cisło, Upper bound for the number of bound states induced by the curvature of singular potential, *Reports on Mathematical Physics* **68** no. 2, 225–240 (2011).
[49] S. Kondej, M. Dudek, Bound states induced by interaction potential deformation. *Reviews on Advanced Materials Science*, **Vol. 23** no. 2, 126–132, (2010).
[50] P. Kondej, W. Leoński, A straight waveguide with the wire inducing resonances. *J. Phys. A: Math. and Theor.* **Vol. 47** no. 22, Article Number 225201 (2014).
[51] S. Kondej, J. Vaz Jr., Fractional Schrödinger operator with delta potential localized on circle, *J. Math. Phys.* **Vol 53** no. 3, Article Number 033503 (2012).
[52] S. Kondej, I. Veselić, Spectral gap of segment of periodic waveguides. *Letters in Mathematical Physics* **Vol. 79**, no. 1, 95–98, (2007).
[53] V. Kosmanenko, M. Dudkin, N. Koshmanenko, The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators, 2016.
[54] M. G. Krein, The Theory of Self-Adjoint Extensions of Half-Bounded Hermitean Operators and Their Applications, *Math. Sbornik* **20** no. 62 (1947), 431–459 (in russian).

[55] D. Krejčiřík, P. Siegl, M. Tater, J. Viola, Pseudospectra in non-Hermitian quantum mechanics, *J. Math. Phys.* **56** 103513 (2015).

[56] D. Krejčiřík, J. Kříž, On the spectrum of curved quantum waveguides, *Publ. RIMS,* Kyoto University **41** no. 3, 757–791 (2005).

[57] V. Lotoreichik, Note on 2-D Schrödinger operators with $\delta-$ interaction on angles and crossing lines, *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* **3** 166-172 (2013).

[58] J. T. Lodergan, J. P. Carini, D. P. Murdock, Binding and scattering in two-dimensional systems, 1999.

[59] A. Posilicano, A Krein-like Formula for Singular Perturbations of Self-Adjoint Operators and Applications, *J. Funct. Anal.* **183** 109–147 (2001).

[60] A. Posilicano, Boundary Triples and Weyl Functions for Singular Perturbations of Self-Adjoint Operators, *Methods Funct. Anal. Topology* **10** 57–63 (2004).

[61] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics: I. Functional analysis, Academic Press, New York, 1972.

[62] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics: II. Fourier analysis.Self-adjointness, Academic Press, New York, 1975.

[63] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics: IV. Analysis of operators, Academic Press, New York, 1978.

[64] K.M. Schmidt, Critical coupling constants and eigenvalue asymptotics of perturbed periodic Sturm-Liouville operators, *Commun. Math. Phys.* **211** 645–685 (2000).

[65] J. Shabani, Finitely many delta interactions with supports on concetric spheres. *J. Math. Phys.* **29** 660–664 (1988).

Sylwia Kondej